SUITES

I. Généralités sur les suites (rappels de Première ES) 1

I.1 Définition 1

I.2 Sens de variation 1

II. Suites arithmétiques 3

III. Suites géométriques 4

IV. Limite d'une suite 6

IV.1 Définitions 6

IV.2 Limite d'une suite géométrique 7

I. Généralités sur les suites (rappels de Première ES)

I.1 Définition

DÉFINITION. Une ***suite*** numérique réelle est .... L'image de l'entier naturel n par une suite u est notée $u(n)$ ou u_n .
u_n est appelé .... de la suite ou terme d'indice n .

Attention aux notations : $u_n \neq (u_n)$ et $u_{n+1} \neq u_n + 1$

Exemples : - la suite (u_n) définie par $u_n = -2n + 8$.
- la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = -2v_n + 5$.

I.2 Sens de variation

DÉFINITIONS.

(u_n) est ***croissante*** lorsque pour tout entier n, ...

(u_n) est ***strictement croissante*** lorsque pour tout entier n, ...

(u_n) est ***décroissante*** lorsque pour tout entier n, ...

(u_n) est ***strictement décroissante*** lorsque pour tout entier n, ...

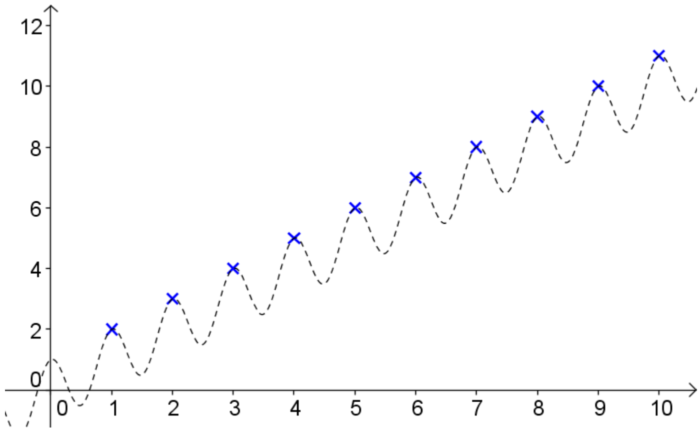
(u_n) est ***constante*** lorsque pour tout entier n, ...

Exemple : Étudier la variation de la suite (u_n) définie par $u_n = 2n^2 + 3$.

Méthodes pour étudier le sens de variations d'une suite (u_n) :

- Si la suite est de la forme $u_n = f(n)$, son sens de variations est celui de la fonction f *.
- On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
- Si $u_n > 0$ (termes tous strictement positifs), on compare le quotient avec 1.

* Attention : la condition est suffisante, mais pas nécessaire, c'est-à-dire que la suite peut être croissante alors que la fonction ne l'est pas, par exemple :

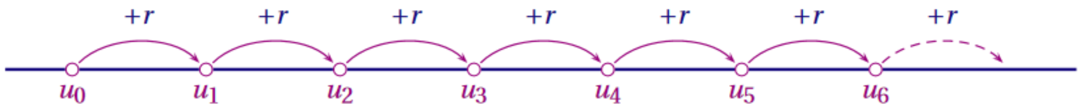


Exemples :

- Étudier la variation de la suite (v_n) définie par $v_0 = -50$ et $v_{n+1} = v_n + 2n + 10$.

- Étudier la variation de la suite (w_n) définie par $w_n = -8n^2 + 5n + 7$.

II. Suites arithmétiques



Suite arithmétique de raison *r*	
Définition	
Terme général	
Montrer qu'une suite est arithmétique	
Sens de variation	

Exemple : On s'intéresse à l'évolution de la fréquentation d'un grand camping situé en France. En moyenne, la fréquentation entre 2012 et 2018 a augmenté de 1143 clients par an, avec 15 000 personnes en 2018.
On considère donc qu'à partir de 2018, la fréquentation augmentera chaque année de 1143 clients.
On note alors v_n la fréquentation du camping pour l'année (2018 + n).

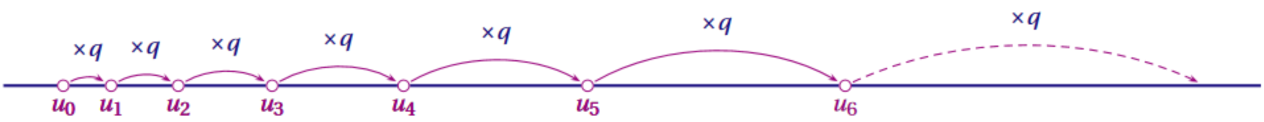
1. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier.

2. Exprimer v_n en fonction de n .

Complément

Sauriez-vous calculer rapidement $1+2+3+4+\ldots+100$? Et le nombre de clients sur la période 2018-2050 ?

III. Suites géométriques



Suite géométrique de raison q	
Définition	
Terme général	
Montrer qu'une suite est géométrique	
Sens de variation	

Exemple : Pour respecter une nouvelle norme antipollution, un groupe industriel s'engage à réduire chaque année sa quantité de rejets polluants de 6 %.
En 2015, la quantité de rejets polluants était de 50 000 tonnes.

1. Quel a été la quantité de rejets polluants en 2017?
2. Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de rejets polluants pour l'année $(2015+n)$.
   On a donc $r_0 = 50000$.
   a) Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n. En déduire la nature de la suite (r_n).
   b) Donner l'expression de r_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la suite (r_n).
4. La direction du groupe industriel souhaite connaître l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.
   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin de déterminer au bout de combien d'années la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.

      $R \leftarrow 50000$
      $N \leftarrow 0$
      Tant que $R\ldots$
      $\quad R \leftarrow \ldots$
      $\quad N \leftarrow N+1$
      Fin Tant que

   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de la variable N calculée par cet algorithme.
   En déduire l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.

PROPRIÉTÉ. **Somme des termes d'une suite géométrique**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $q \neq 1$.

Pour tout entier naturel n : $1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n =$

Démonstration :

Exemple 1 : Imaginons… Je vous offre 1 € aujourd'hui. Puis, chaque jour du mois en cours, je double cette quantité et je vous la donne. De quelle quantité d'argent disposerez-vous à la fin du mois ?

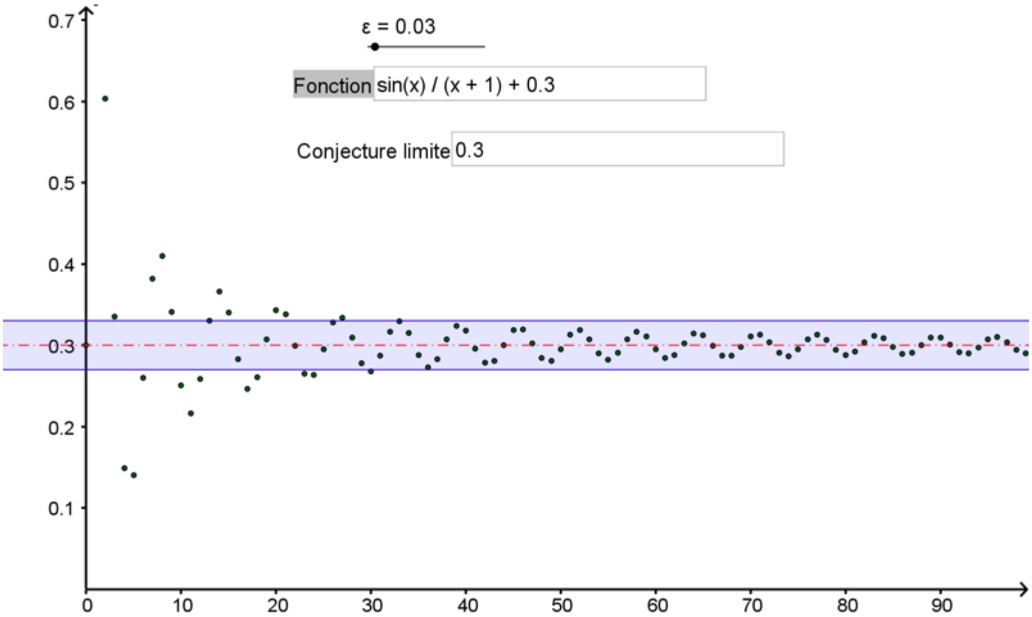
Exemple 2 : On s'intéresse à l'évolution de la fréquentation d'un grand camping situé en France (15 000 clients en 2018). En moyenne, la fréquentation entre 2012 et 2018 a augmenté de 4,1 % par an.
On considère donc qu'à partir de 2018, la fréquentation augmentera chaque année de 4,1 %.
Déterminer le nombre de clients sur la période 2018-2050 ?

IV. Limite d'une suite

IV.1 Définitions

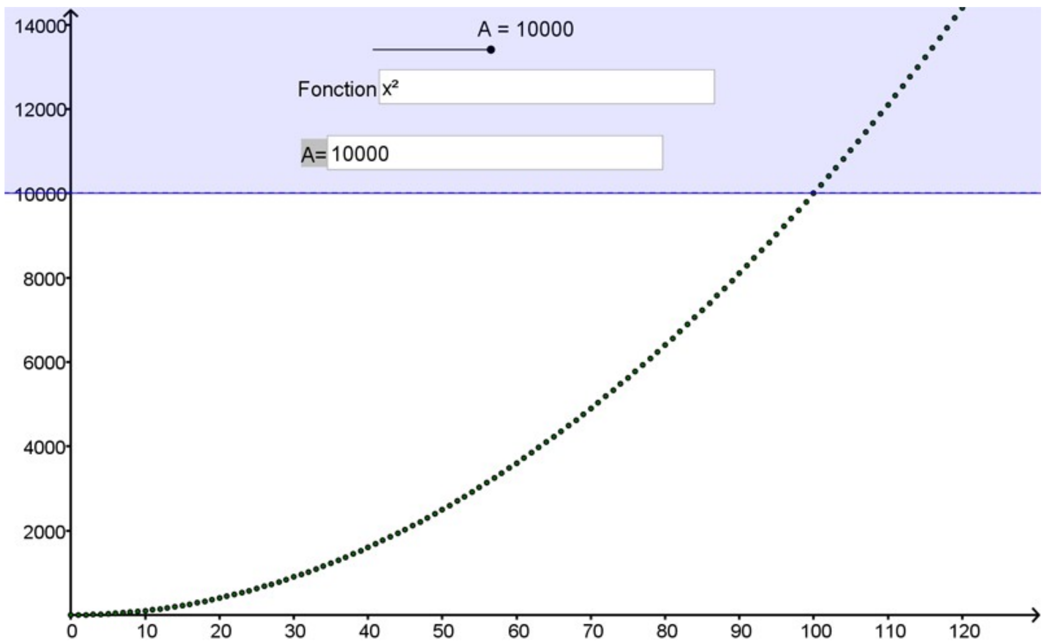
DÉFINITION.
Une suite (u_n) admet pour limite le réel l si **tout** intervalle ouvert contenant l contient **tous** les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que (u_n) est ***convergente*** et converge vers l. Notation : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.



DÉFINITION.
Une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si **tout** intervalle du type $]A ; +\infty[$ contient **tous** les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que (u_n) est ***divergente vers*** $+\infty$. Notation : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



IV.2 Limite d'une suite géométrique

Admises

PROPRIÉTÉS.

Soit $q>0$.

q	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$			

Complément

Déterminer la limite d'une suite géométrique de raison q avec $q>0$.

Exercice type :

PARTIE A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1760$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}65u_n + 861$.

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2460$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 2460 - 700 \times 0{,}65^n$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Une étude réalisée sur le nombre d'emplacements de camping d'une région touristique a permis d'établir que la demande d'emplacements peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'emplacements l'année $2017 + n$.

1. Un réaménagement de l'offre d'emplacements de camping sera nécessaire dès que la demande dépassera 2 400 emplacements.
   On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 1760
N ← 0
Tant que U ⩽ 2400
    N ← N + 1
    U ← 0,65 × U + 861
Fin Tant que
```

   a) Recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité.

Valeur de N	0	1	…	
Valeur de U	1 760		…	
Condition $U \leqslant 2400$	Vraie		…	

   b) Donner la valeur affectée à la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Selon ce modèle, est-il possible d'envisager une demande supérieure à 2 500 emplacements ?