Restitutions Organisées de Connaissances

*Dans ce document figurent les **18 démonstrations explicitement au programme de terminale S**.
Parmi ces démonstrations, **10 sont « exigibles et correspondent à des capacités attendues »** : elles sont marquées d'une étoile (*).*

Il ne s'agit pas d'apprendre ces démonstrations par cœur mais d'en comprendre les étapes importantes, car elles forment les « bases » de nombreux exercices en mathématiques.

Il arrive souvent qu'un exercice demande, à l'aide de plusieurs petites questions guidées, de démontrer un des résultats présentés ici, dans le contexte du programme ou légèrement différent.

Bien sûr, on peut vous demander de démontrer une « petite » propriété qui ne figure pas dans ce document (comme ce fut le cas au bac 2014). Ici ne figurent que les démonstrations explicitement écrites dans le programme : ce sont sans doute les moins simples.

Suites

*1. Théorème de comparaison

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : - à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Écrire la définition de la limite.
Prendre le max des rangs n_1 et n_2 .

Soit $A > 0$. On note $I =]A\,;+\infty[$.

- A partir d'un certain rang n_1 , on a $u_n \leqslant v_n$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc à partir d'un certain rang n_2 , I contient tous les termes de la suite (u_n) .

On pose $n_0 = max(n_1\,; n_2)$.
Alors pour tout entier $n \geqslant n_0$:
 $u_n \in$ I et $u_n \leqslant v_n$
 donc $v_n \geqslant u_n > A$
 donc $v_n > A$
 donc $v_n \in$ I.
Donc I contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rand n_0 .

2. Inégalité de Bernoulli

Si $a > 0$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1 + n\,a$.

Par récurrence sur n .

*3. Limite d'une suite géométrique

Si $q > 1$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

$q>1$ donc $q=1+a$.
Inégalité de Bernoulli : $q^n \geqslant 1+na$.
Thm de comparaison.

Soit $q > 1$. Alors il existe $a > 0$ tel que $q = 1 + a$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $q^n = (1+a)^n$
 donc d'après l'inégalité de Bernoulli, $q^n \geqslant 1 + n\,a$.
 Or, $a > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + n\,a) = +\infty$ donc par comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

4. Majoration d'une suite croissante convergente

Si une suite est croissante et admet pour limite *l*, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à *l*.

Par l'absurde :

si $\exists$ *N tq* $u_N > l$ *alors* $]l-1;u_N[$ *contient l*

- $\lim u_n = l$ *donc « tous dans* $]l-1;u_N[$ *» ... (*)*
- (u_n) *croissante donc ... => contradiction avec (*)*

Supposons qu'il existe N $\in \mathbb{N}$ tel que $u_N > l$.

Alors $]l-1;u_N[$ est un intervalle ouvert qui contient *l*.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

donc cet intervalle contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_0 . **(1)**

Or, pour tout $n \geqslant N$:

puisque (u_n) est croissante, on a $u_n \geqslant u_N$

donc $u_n \notin]l-1;u_N[$. **(2)**

Ceci est impossible : **(2)** contredit **(1)**.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant l$.

5. Divergence d'une suite croissante non majorée

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

On pose A $\in \mathbb{R}$.

Suite non majorée donc il existe $u_N > A$.

(u_n) *croissante =>* $u_n \geqslant u_N > A$.

Donc $]A;+\infty[$ *contient tous les* u_n *à partir de N.*

Soit (u_n) une suite croissante non majorée et $I =]A;+\infty[$ où A $\in \mathbb{R}$.

(u_n) n'est pas majorée donc n'est pas majorée par A : il existe N $\in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$.

Or (u_n) est croissante, donc pour tout $n \geqslant N$:

$u_n \geqslant u_N$

et ainsi $u_n > A$.

L'intervalle I contient donc tous les termes de (u_n) à partir du rang N : $\lim u_n = +\infty$.

*6. Unicité de la fonction exponentielle

Il existe une unique fonction *f* dérivable sur ℝ telle que : $f'=f$ et $f(0)=1$.

On l'appelle fonction exponentielle, notée exp.

L'existence d'une telle fonction est admise[1].
Démontrons l'unicité.

- Poser $h(x)=f(x)f(-x)$.

En déduire que $h(x)=1$ *et donc que* f *ne s'annule pas.*

- <u>Unicité</u> : poser $k=\dfrac{f}{g}$.

Montrer que $k(x)=1$ *et donc que* $f=g$.

<u>1ère étape : *f* ne s'annule pas sur ℝ</u>

Soit f une fonction dérivable sur ℝ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
On définit la fonction h par $h(x)=f(x)f(-x)$.
h est dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables.

$$\forall\ x\in\mathbb{R}:\quad \begin{aligned} h'(x)&=f'(x)f(-x)-f(x)f'(-x)\\ &=f(x)f(-x)-f(x)f(-x) \text{ car } f'=f\\ &=0 \end{aligned}$$

Donc h est constante.
Or $h(0)=f(0)f(0)=1$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=1$.
Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)f(-x)=1$.
On en déduit que f ne s'annule par sur ℝ.

<u>2ème étape : unicité</u>

Soient *f* et *g* deux fonctions définies et dérivables sur ℝ telles que $f'=f$, $g'=g$, $f(0)=g(0)=1$.

D'après la 1ère étape, g ne s'annule pas : on définit la fonction *k* par $k=\dfrac{f}{g}$.

Alors : $k'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$. Or $f'=f$ et $g'=g$ donc : $k'=0$.

Donc *k* est constante.

Or $k(0)=\dfrac{f(0)}{g(0)}=1$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $k(x)=1$.

D'où $\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ et $f(x)=g(x)$.

1 Cela découle du théorème de Cauchy-Lipschitz (difficile – au programme de l'Agrégation de mathématiques), qui dit que sous certaines conditions, une équation différentielle dont on connaît une valeur admet au moins une solution.
Voir par exemple : http://sandrine.toonywood.org/pageperso/agreg/cauchy-lipschitz.pdf

*7. Limites en l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

1. Démontrons que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$.

Poser $f(x) = e^x - x$ et étudier cette fonction.

En déduire que $f(x) \geqslant 0$ et donc que $e^x \geqslant x$.

Conclure avec le théorème de comparaison.

On définit la fonction f par $f(x) = e^x - x$ pour tout réel x .
f est dérivable sur ℝ comme différence de fonctions dérivables.
$\forall\ x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^x - 1$.
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ (car la fonction exp est strictement croissante sur ℝ)
Donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
Or, $f(0) = 1$ donc pour tout réel $x \geqslant 0$: $f(x) \geqslant 0$, d'où $e^x \geqslant x$.
Donc d'après les théorèmes de comparaison : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

> Remarque : on aurait pu démontrer de la même manière que $e^x \geqslant x+1$, ce qui est intéressant puisque $y = x+1$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

2. Démontrons que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Or $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ ...

Conclure.

D'après **1.** : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Or, pour tout réel x : $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

8. Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$.

La fonction F définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\mathrm{F}'=f$.

Démonstration dans le cas où f est croissante sur [a;b] :

Calculer $\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)$ pour x fixé.
Distinguer les cas $h>0$ et $h<0$.
Faire un dessin et encadrer le résultat par l'aire de deux rectangles (fonction croissante et positive).
Utiliser la continuité de f en x et utiliser le théorème des gendarmes pour conclure.

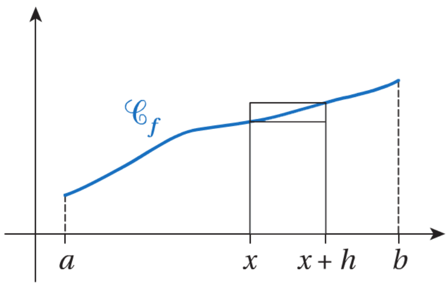
On va montrer que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}=f(x)$$ pour tout x de $[a;b]$.

Ainsi on aura $\mathrm{F}'=f$.

Soit $x\in[a;b]$. On pose $h\in\mathbb{R}$ avec $x+h\in[a;b]$.

1[er] cas : *h* > 0



$$\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt$$

Or, d'après la relation de Chasles : $\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$

donc $\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$

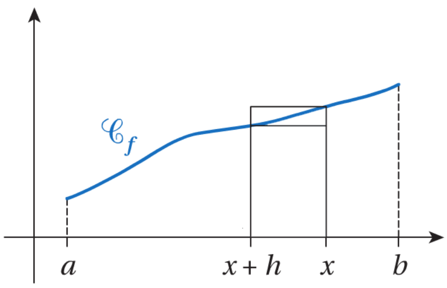
Et f est croissante sur $[a;b]$ donc on peut encadrer $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ par l'aire des deux rectangles de largeur h et de longueurs $f(x)$ et $f(x+h)$:

$$h\times f(x)\leqslant\int_x^{x+h} f(t)\,dt\leqslant h\times f(x+h)$$

d'où $h\times f(x)\leqslant F(x+h)-F(x)\leqslant h\times f(x+h)$

Donc, puisque $h>0$: $\boxed{f(x)\leqslant\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x+h)}$. **(1)**

2[ème] cas : *h* < 0



$$\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt$$

Or, d'après la relation de Chasles : $\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$

donc $\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt=-\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt$

Et f est croissante sur $[a;b]$ donc on peut encadrer $\int_{x+h}^{x} f(t)dt$ par l'aire des deux rectangles de largeur h et de longueurs $f(x+h)$ et $f(x)$:

$$h\times f(x+h)\leqslant\int_{x+h}^{x} f(t)dt\leqslant h\times f(x)$$

d'où $h\times f(x+h)\geqslant F(x+h)-F(x)\geqslant h\times f(x)$

Donc, puisque $h<0$: $\boxed{f(x+h)\leqslant\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x)}$. **(2)**

Bilan :

f est continue en x donc $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$.

De **(1)** et **(2)**, on déduit du théorème des gendarmes que : $\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}=f(x)$.

Conclusion : F est donc dérivable sur $[a;b]$ et $\mathrm{F}'=f$.

9. Continuité et existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Démonstration dans le cas d'un intervalle fermé borné [a;b],
en admettant que la fonction possède alors un minimum sur cet intervalle :

f admet un minimum m.

Poser $g(x)=f(x)-m$.

Poser $\mathrm{G}(x)=\int_{a}^{x} g(t)dt$ *; alors* $\mathrm{G}'=g$.

Poser $\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+mx$ *et montrer que* $\mathrm{F}'=f$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$.
Alors f admet un minimum m sur $[a;b]$: pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\geqslant m$.
On pose $g(x)=f(x)-m$.
La fonction g est donc continue et positive sur $[a;b]$.
Donc la fonction G définie par $\mathrm{G}(x)=\int_{a}^{x} g(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\mathrm{G}'=g$.
Alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+mx$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\mathrm{F}'(x)=g(x)+m=f(x)$.
Donc la fonction f a au moins une primitive sur [a;b] : la fonction F.

10. Théorème du toit

Soient P et P' deux plans sécants suivant une droite Δ.

Si une droite d de P est parallèle à une droite d' de P', alors Δ est parallèle à d et d'.

<u>1^{er} cas</u> : d=d' (trivial)

<u>2^{ème} cas</u> : $d \,//\, d'$ mais $d \neq d'$

Par l'absurde, montrer que Δ et d ne sont pas sécantes

=> $\Delta \,//\, d$.

Et donc $\Delta \,//\, d'$.

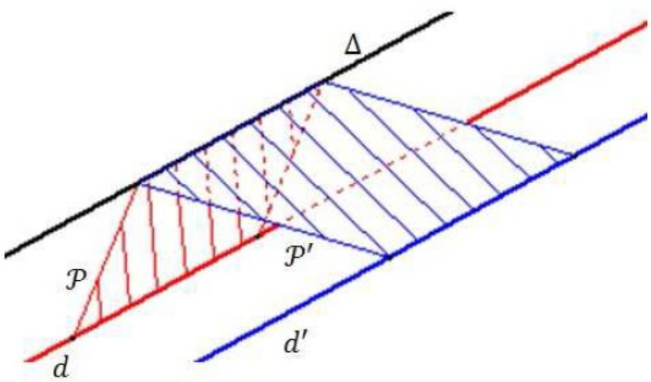
On suppose donc que P et P' sont sécants en Δ, et que $d \,//\, d'$ avec $d \subset P$ et $d' \subset P'$.

• Si d et d' sont confondues : alors Δ est aussi confondue avec d et d'. Le théorème est donc vrai.

• Si d et d' sont parallèles non confondues :
En raisonnant par l'absurde,

supposons que Δ et d soient sécantes, et notons M leur point d'intersection.
M $\in \Delta$ donc M $\in P'$.
Or, d est parallèle à d' et passe par M, donc $d \subset P'$.
On a donc : $d \subset P$ et $d \subset P'$.
Or, P et P' sont sécants, donc ils le sont en la droite d.
Ainsi, d est confondue avec Δ,
ce qui contredit le fait que d et Δ soient sécantes.

Donc Δ et d ne sont pas sécantes.
Comme elles sont coplanaires, elles sont donc parallèles : $\Delta \,//\, d$.
Par suite, $\Delta \,//\, d'$ car $d \,//\, d'$.



Autres démonstrations accessibles en Terminale S :

Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur de *d* et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.

Soit $(\vec{u}, \vec{v}_1)$ un couple de vecteurs directeurs du plan *P*.

Comme Δ ⊂ *P*, alors $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}_1$ sont coplanaires : il existe deux réels x_1 et y_1 tels que :

$$\vec{w}=x_1\vec{u}+y_1\vec{v}_1 .$$

Soit $(\vec{u}, \vec{v}_2)$ un couple de vecteurs directeurs du plan *P'*.

Comme Δ ⊂ *P'*, alors $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}_2$ sont coplanaires : il existe deux réels x_2 et y_2 tels que :

$$\vec{w}=x_2\vec{u}+y_2\vec{v}_2 .$$

On en déduit que $x_1\vec{u}+y_1\vec{v}_1=x_2\vec{u}+y_2\vec{v}_1$

d'où $(x_1-x_2)\vec{u}=-y_1\vec{v}_1+y_2\vec{v}_2$.

Supposons $x_1-x_2\neq 0$.

Alors $\vec{u}=\dfrac{-y_1}{x_1-x_2}\vec{v}_1+\dfrac{y_2}{x_1-x_2}\vec{v}_2$.

Donc $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont coplanaires…

Ceci contredit le fait que *P* et *P'* soient sécants.

Donc $x_1-x_2=0$.

Donc $y_1\vec{v}_1=y_2\vec{v}_2$.

Supposons $y_1\neq 0$.

Alors $\vec{v}_1=\dfrac{y_2}{y_1}\vec{v}_2$, donc $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires…

Ce qui contredit le fait que *P* et *P'* soient sécants.

Donc $y_1=0$.

Donc : $\vec{w}=x_1\vec{u}$.

Donc $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Donc Δ // *d* .

Or *d* // *d'* donc Δ // *d'*.

Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur de *d* et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.

Par l'absurde, supposons que Δ n'est pas parallèle à *d*.

Alors $\vec{w}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires : comme Δ est contenu dans P,
alors ce sont donc deux vecteurs directeurs du plan *P*.

De plus, Δ n'est pas parallèle à *d'* (car Δ n'est pas parallèle à *d* et *d* // *d'*),
donc $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs directeurs du plan *P'*.

Par conséquent, *P* et *P'* possèdent deux vecteurs directeurs en commun : ils sont parallèles…
Ceci contredit le fait qu'ils soient sécants.

Donc Δ // *d*.

Or *d* // *d'* donc Δ // *d'*.

*11. Équation cartésienne d'un plan

On munit l'espace d'une repère orthonormé.

- Un plan P de vecteur normal non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme

$$ax+by+cz+d=0 \text{ où } d \in \mathbb{R}.$$

- Si a, b et c sont trois réels non tous nuls et si d est un réel, alors l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

• Poser M ∈ P et A un point de l'espace.

Traduire $\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n}=0$.

• <u>1^er cas</u> : $a \neq 0$

Trouver un point A qui appartient à P : $\mathrm{A}\left(-\dfrac{d}{a};0;0\right)$.

Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n}=0$ *avec* $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

<u>2^ème cas</u> : $a=0$

Alors $b \neq 0$ *ou* $c \neq 0$ *et on reprend le 1^er cas...*

• Soit P un plan de vecteur normal non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et passant par $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}}\,;z_{\mathrm{A}})$.

Soit $\mathrm{M}(x\,;y\,;z) \in P$.
Alors : $\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n}=0$ d'où $ax+by+cz-ax_{\mathrm{A}}-by_{\mathrm{A}}-cz_{\mathrm{A}}=0$.
En posant $d=-ax_{\mathrm{A}}-by_{\mathrm{A}}-cz_{\mathrm{A}}$ on a bien $ax+by+cz+d=0$.

• Soit P l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$.
Si $a \neq 0$:

$\mathrm{A}\left(-\dfrac{d}{a};0;0\right)$ vérifie $ax+by+cz+d=0$, donc A ∈ P.

Posons $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n}=\begin{pmatrix} x+\dfrac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=a\left(x+\dfrac{d}{a}\right)+b\,y+c\,z=a\,x+d+b\,y+c\,z$

d'où $\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n}=0$.
Donc P est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Si $a=0$:

Alors soit $b \neq 0$ soit $c \neq 0$, et on reprend la démonstration avec $\mathrm{A}\left(0;-\dfrac{d}{b};0\right)$ ou $\mathrm{A}\left(0;0;-\dfrac{c}{b}\right)$.

*12. Droite orthogonale à un plan

Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si, et seulement si, elle est orthogonale a deux droites sécantes de ce plan.

$\Leftarrow$ Poser 2 droites sécantes et une droite du plan.

Poser les vecteurs directeurs de chaque droite.

Ces vecteurs sont coplanaires…

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ et montrer que c'est égal à 0.

$\Rightarrow$ Condition nécessaire

Trivial, puisqu'une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

$\Leftarrow$ Condition suffisante

Soit *d* une droite, orthogonale à deux droites sécantes d'un plan *P*, notées d_1 et d_2 .
On note $\vec{u}$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ des vecteurs directeurs respectifs de *d*, d_1 et d_2 .
Soit Δ une droite du plan *P,* de vecteur directeur noté $\vec{v}$.
Les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont coplanaires donc il existe a et b deux réels tels que $\vec{v}=a\vec{u}_1+b\vec{u}_2$.
Alors : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.(a\vec{u}_1+b\vec{u}_2)=a\vec{u}.\vec{u}_1+b\vec{u}.\vec{u}_2$.
Or *d* est orthogonale à d_1 et d_2 donc $\vec{u}.\vec{u}_1=\vec{u}.\vec{u}_2=0$
d'où $\vec{u}.\vec{v}=0$.
Donc *d* est orthogonale à Δ.

Conditionnement, indépendance

*13. Événements indépendants

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{\mathrm{A}}$ et B le sont aussi.

Objectif : montrer que $p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)=p\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times p(\mathrm{B})$.

Montrer que $p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)=p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

Utiliser la définition de A et B indépendants.

Factoriser et utiliser $1-p(\mathrm{A})=p\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$.

Soient A et B deux événements indépendants.

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ et $\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}$ forment une partition de B
donc $p(\mathrm{B})=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)$.
Or, A et B étant indépendants : $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})$.
Donc $p(\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})+p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)$
et alors

$$\begin{aligned} p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)&=p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})\\ &=\left(1-p(\mathrm{A})\right)p(\mathrm{B})\\ &=p\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times p(\mathrm{B}). \end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{A}}$ et B sont donc indépendants.

*14. Espérance de la loi exponentielle

L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.

Définition de l'espérance : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,dt$ *où* $g(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Calculer $g'(t)$ *et en déduire* $g(t)$ *en fonction de* $g'(t)$.

Calculer alors $\int_0^x g(t)\,dt$.

Faire tendre x *vers* $+\infty$ *et conclure.*

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,dt$ où $g(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

On a : $g'(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda^2 t \mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda g(t)$

d'où $g(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g'(t)$.

Alors : $$\begin{aligned}\int_0^x g(t)\,dt &= \int_0^x \left(\mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g'(t)\right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g(t)\right]_0^x \\ &= -\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} g(x) + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} g(0) \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right).\end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} = \lim_{X \to +\infty} X \mathrm{e}^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$

donc $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{\lambda}$.

15. Durée de vie sans vieillissement

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.

Pour tous réels t et h positifs : $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.

Écrire la définition de la probabilité conditionnelle.

Remplacer avec la définition de la fonction de répartition de la loi exponentielle.

Simplifier et conclure.

$$
\begin{aligned}
p_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) &= \frac{p(X \geqslant t \text{ et } X \geqslant t+h)}{p(X \geqslant t)} \\
&= \frac{p(X \geqslant t+h)}{p(X \geqslant t)} \\
&= \frac{1 - p(X < t+h)}{1 - p(X < t)} \\
&= \frac{1 - \left(1 - e^{-\lambda(t+h)}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\
&= e^{-\lambda h} \\
&= p(X \geqslant h)
\end{aligned}
$$

*16. Seuil pour la loi normale centrée réduite

Soit T une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Pour tout $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $\mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant \mathrm{T} \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

On cherche x tel que $p(-x \leqslant \mathrm{T} \leqslant x) = 1-\alpha$.

Transformer cette égalité en faisant apparaître la primitive $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Étudier rapidement cette fonction F : continue, strictement croissante, limites…

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et conclure.

On cherche un réel $x>0$ tel que $p(-x \leqslant \mathrm{T} \leqslant x) = 1-\alpha$.
Or : $p(-x \leqslant \mathrm{T} \leqslant x) = 2\,p(0 \leqslant \mathrm{T} \leqslant x)$ par symétrie de la densité de la loi normale centrée réduite, notée f

$$= 2\int_0^x f(t)\,dt$$

$$= 2\,\mathrm{F}(x)$$ où F est la primitive de f qui s'annule en 0.

Donc : $p(-x \leqslant \mathrm{T} \leqslant x) = 1-\alpha \iff 2\,\mathrm{F}(x) = 1-\alpha$

$$\iff \mathrm{F}(x) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Or, d'après le cours sur l'intégration, F est continue (et même dérivable) sur $[0;+\infty[$,
et elle est strictement croissante sur cet intervalle.

De plus : $\mathrm{F}(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}$ (aire sous la « courbe en cloche » en partant de l'origine).

On a alors :

x	0	$+\infty$
F	0 ↗	$\frac{1}{2}$

Or : $\alpha \in]0;1[$ donc $0<\alpha<1$ donc $-1<-\alpha<0$ donc $0<1-\alpha<1$ donc $0<\frac{1-\alpha}{2}<\frac{1}{2}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel strictement positif, noté u_α, tel que : $\mathrm{F}(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$.

Par conséquent, il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $p(-u_\alpha \leqslant \mathrm{T} \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

Intervalle de fluctuation et estimation

*17. Intervalle de fluctuation asymptotique

Si $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$, alors pour tout $\alpha \in \ ]0;1[$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} p\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$ où $I_n = \left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ et u_α désigne le réel tel que $p(-u_\alpha \leqslant T \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$ où $T \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Poser $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. *Utiliser le théorème de Moivre-Laplace.*

Utiliser le théorème qui dit qu'il existe un unique u_α *...*

Re-écrire ce qu'on calcule en faisant apparaître $\dfrac{X_n}{n}$.

Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$ et $\alpha \in \ ]0;1[$.

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

D'après le théorème de Moivre-Laplace :

pour tous réels *a* et *b*, $\lim\limits_{n\to+\infty} p(a \leqslant Z_n \leqslant b) = p(a \leqslant T \leqslant b)$ où $T \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Or, il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $p(-u_\alpha \leqslant T \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} p(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

Mais
$$
\begin{aligned}
p(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) &= p\left(-u_\alpha \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant u_\alpha\right)\\
&= p\left(np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right)\\
&= p\left(\frac{n\,p - u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant \frac{np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n}\right) \quad \text{car } n>0\\
&= p\left(\frac{n\,p - u_\alpha\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant \frac{np + u_\alpha\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n}\right)\\
&= p\left(p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{car } \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

d'où le résultat : $\lim\limits_{n\to+\infty} p\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$.

18. Intervalle de confiance

Soit $X_n \sim \mathcal{B}\ (n;p)$. On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.
Lorsque n est assez grand, l'intervalle $\left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

La démonstration se décompose en trois parties :

Partie 1
On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$: $\mathrm{p}(-2 \leqslant Z_n \leqslant 2) > 0{,}95$ où $T \sim \mathcal{N}\ (0;1)$.

Utiliser le théorème de Moivre-Laplace avec $a=-2$ *et* $b=2$.
Traduire la définition de la limite : il existe n_0 *tel que ...*
Remarquer que $p(-2 \leqslant T \leqslant 2) > 0{,}954$.

Partie 2
Il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$: $\mathrm{p}\left(F_n \in \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) > 0{,}95$.

Remplacer Z_n *par sa définition et encadrer* $\dfrac{X_n}{n}$.

Approcher cet encadrement en majorant $p(1-p)$ *par* $\dfrac{1}{4}$.

Partie 3
$F_n \in \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] \Leftrightarrow p \in \left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

La partie 3 ne pose pas de problème :

$$
\begin{aligned}
p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} &\Leftrightarrow -F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant -p \leqslant -F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\Leftrightarrow F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant p \geqslant F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\Leftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

Démontrons la partie 1 : On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

D'après le théorème de Moivre-Laplace :

$$\lim_{n\to+\infty} p(-2 \leqslant Z_n \leqslant 2) = p(-2 \leqslant T \leqslant 2) \text{ où } T \sim \mathcal{N}(0;1).$$

Par souci de clarté, notons $a_n = p(-2 \leqslant Z_n \leqslant 2)$ et L la limite : $L = p(-2 \leqslant T \leqslant 2)$.

D'après la définition de la limite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $a_n \in]L-\epsilon ; L+\epsilon[$.
Or, $p(-2 \leqslant T \leqslant 2) \geqslant 0{,}9544$ donc $L \geqslant 0{,}9544$.
Si $\epsilon < 0{,}0004$ alors on aura $-\epsilon > -0{,}0004$ et donc : $L - \epsilon > 0{,}954$.
Et alors : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $a_n \in]0{,}954 ; L+\epsilon[$.

Dès que $n \geqslant n_0$: $a_n > 0{,}95$, c'est-à-dire : $p(-2 \leqslant Z_n \leqslant 2) > 0{,}95$.

Démontrons la partie 2 : On va remplacer Z_n par sa définition.

$$p(-2 \leqslant Z_n \leqslant 2) > 0{,}95$$
$$p\left(-2 \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant 2\right) > 0{,}95$$
$$p(np - 2\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + 2\sqrt{np(1-p)})$$
$$p\left(\frac{np - 2\sqrt{np(1-p)}}{n} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant \frac{np + 2\sqrt{np(1-p)}}{n}\right) > 0{,}95 \text{ car } n > 0$$
$$p\left(\frac{np - 2\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant \frac{np + 2\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n}\right) > 0{,}95$$
$$p\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0{,}95 \text{ car } \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On va majorer $\sqrt{p(1-p)}$ par $\dfrac{1}{2}$.

On définit sur $[0;1]$ la fonction f par $f(p) = p(1-p) = -p^2 + p$.
$f'(p) = -2p + 1$ d'où :

p	0		1/2		1
$f'(p)$		+	0	−	
f	0	↗	1/4	↘	0

et donc f admet un maximum lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, qui vaut $\dfrac{1}{4}$.

Donc pour tout $p \in [0;1]$: $0 \leqslant p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

La fonction racine carrée étant croissante, on a : $0 \leqslant \sqrt{p(1-p)} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Donc $\left[p - 2\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

On a donc $p\left(p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{X_n}{n} \leqslant p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0{,}95$.