FONCTIONS COSINUS ET SINUS
COMPLÉMENTS

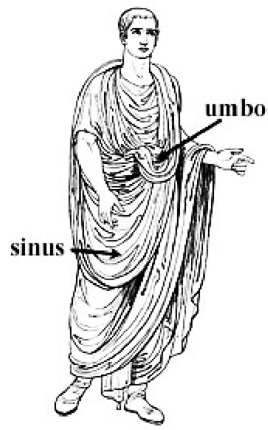
Complément n°1 : pourquoi sinus et cosinus, ces mots bizarres ?

Y a-t-il un rapport entre la fonction sinus et les sinus du front ?

Oui et non ; le mot « sinus » est un mot latin signifiant « courbe, pli, cavité ».
Il a donné en français les mots « sein » (d'ailleurs, en italien, le sinus mathématique se dit *seno*, qui signifie aussi « sein ») et « sinueux ». Mais si les sinus du front forment bien des cavités, l'interprétation selon laquelle le sinus mathématique s'appellerait ainsi car une sinusoïde est sinueuse est un contresens, car la notion de représentation d'une fonction est bien plus récente que celle de sinus !
Voici l'histoire probable du mot « sinus », qui vient d'une erreur de traduction.

Premier temps : le mathématicien indien Âryabhata (VI^{e} siècle) utilise le mot *ardha-jya* qui signifie « demi-corde » (voir plus loin), et qui sera raccourci en *jya*.

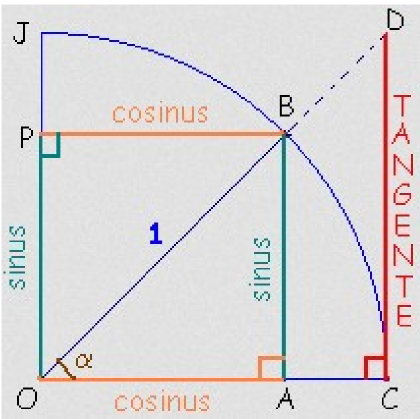
Deuxième temps : invasion de l'Inde par les musulmans.
Découvrant l'œuvre d'Aryabatha, les arabes s'empressent de le traduire dans leur langue. Le terme *jya* est donc traduit phonétiquement en arabe par le mathématicien Al-Fazzârî (VIII^{e} siècle) pour devenir *jiba*, un mot sans signification. Or, l'arabe étant une langue sémitique (Une langue sémitique ne s'écrit qu'avec des consonnes ; pour savoir quelles voyelles ajouter dans un mot afin de le rendre prononçable, il faut se baser sur le contexte de la discussion), ce mot est écrit *jb*.
Il sera alors confondu avec le mot *jaib* qui, lui, signifie « poche ».



Troisième temps : Gérard de Crémone (XII^{e} siècle, vers l'an 1150) confond *jîba* avec *jaib*, qui signifie « poche, cavité » et il le traduit naturellement en latin par *sinus*…
En effet, les toges romaines étaient formées d'un grand drap que l'on ajustait autour du corps de façon à former un pli sous le bras droit. Ce pli est précisément le *sinus* de la toge et jouait le rôle d'une poche (un creux dans lequel on pouvait placer de petits objets).

Quant au cosinus, c'est tout simplement le sinus du complémentaire (de l'angle) :
« co- » vient du latin *cum*, qui signifie « avec ».

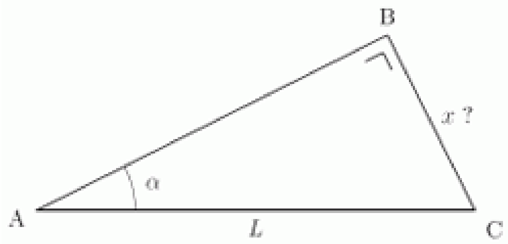
La tangente, elle, vient de ce qu'elle mesure une portion d'une tangente au cercle trigonométrique.



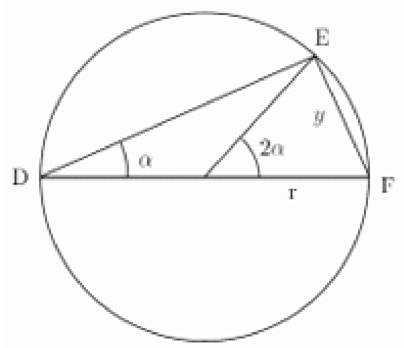
Sources : mapage.noos.fr/r.ferreol/langage/notations/notations.htm et cer1se.free.fr/principia/index.php/gros-plan-sur-le-sinus/print/

Bon d'accord… Mais pourquoi « demi-corde » ?

Aryabatha s'intéressait au problème de calculer, dans un triangle rectangle, la longueur x d'un côté adjacent à l'angle droit en connaissant l'angle opposé α et un autre côté L :



Or il était connu, depuis Euclide, que le milieu du côté L est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle. Si on trace un angle 2α au centre d'un cercle de rayon quelconque r, et qu'on en tire le triangle inscrit DEF comme ci-dessous :



on a que DEF est semblable au triangle ABC de la première figure. On en déduit la relation :

$$\frac{x}{L} = \frac{y}{2r} = \frac{\text{corde}(2\alpha)}{2r}$$

ou encore :

$$x = \frac{L}{r} \times \frac{\text{corde}(2\alpha)}{2}$$

Aryabatha va mettre l'accent sur la quantité

$$\frac{\text{corde}(2\alpha)}{2}$$

qui n'est autre que notre sinus actuel si $r = 1$. Cependant, il choisit une autre valeur pour le rayon. Le cercle chez Aryabatha est divisé en 360 x 60 = 21600 arcs de 1′, qu'il prend comme unité de longueur. On a :

$$2\pi r = 21600$$

où $\pi = 3{,}1416$ chez Aryabatha, comme on l'a vu précédemment. Ceci nous donne la valeur approximative du rayon utilisé : $r = 3438$. Il faudra attendre le 10e siècle pour que le mathématicien perse Abul Wafa décide d'utiliser un cercle de rayon 1, ce qui donnera la version définitive du sinus (et de ses quantités dérivées comme le cosinus et la tangente).

La longueur associée à un angle est donc la demi-corde du double de l'angle.

Source : cer1se.free.fr/principia/index.php/gros-plan-sur-le-sinus/print/

Complément n°2 : à quoi ça sert ces trucs m'sieur ?

Les bases d'une modélisation du monde : tout est onde !

On a créé les fonctions cos et sin à partir d'un cercle et d'un point en mouvement sur ce cercle...
Or, des systèmes rotatifs, il y en a partout : les pales d'une hélice, les roues d'une voiture ou d'un vélo, l'axe d'un moteur, l'aimant dans une dynamo, la Terre qui tourne sur elle-même, la Terre qui tourne autour du Soleil…
De plus, les fonctions trigonométriques ressemblent à des vagues : les ondes et les vagues obéissent également à des fonctions sinusoïdales (ondes sonores, ondes électromagnétiques, etc.).

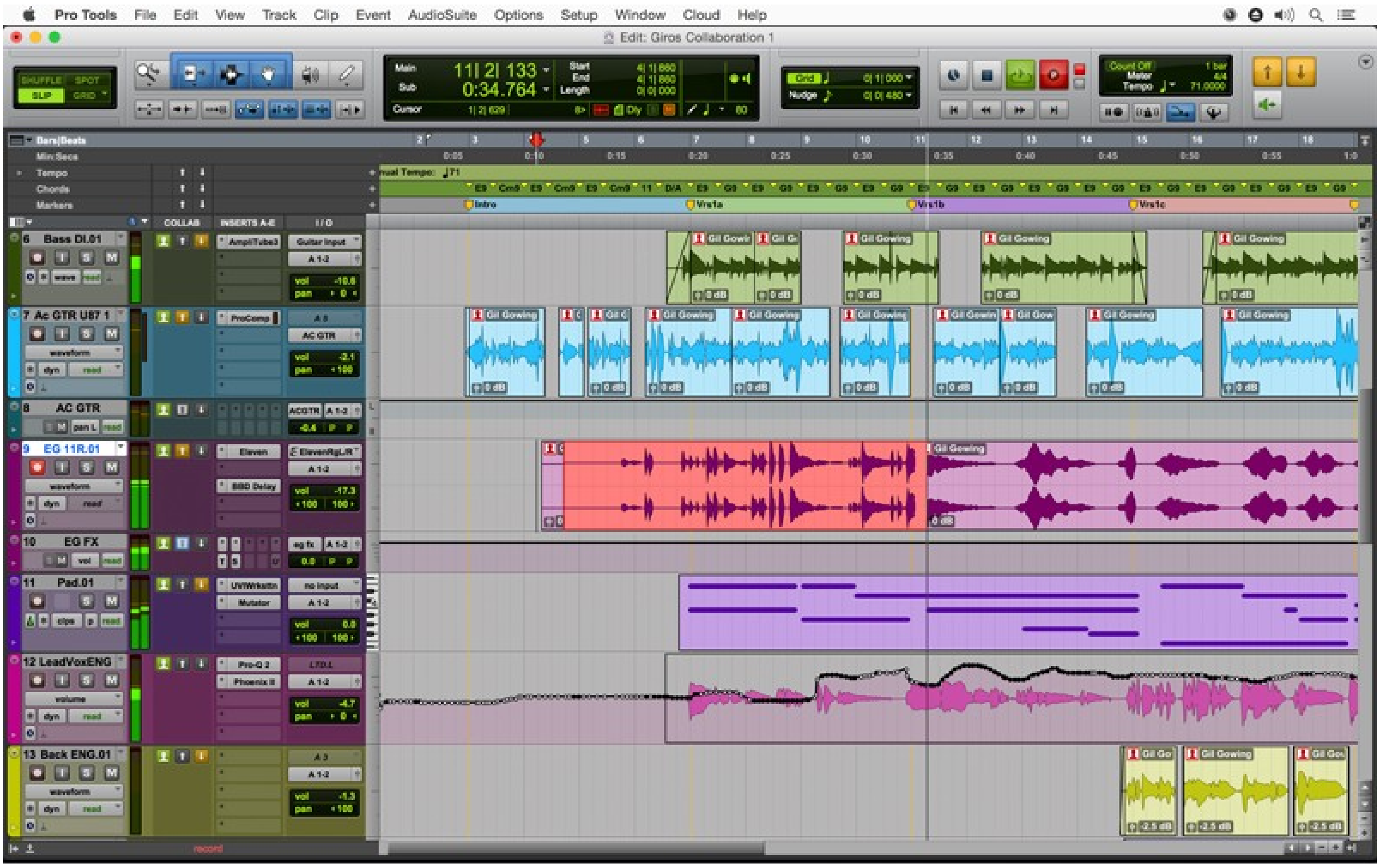
Les fonctions trigonométriques se retrouvent donc un peu dans tous les domaines de la physique et de la science en général.

Comme les dérivées, donc, la trigonométrie non plus n'est pas juste un délire de matheux : elle a une origine géométrique basée sur un cercle (ou une hyperbole, dans le cas de la trigonométrie hyperbolique, voir ci-dessous), et se retrouve donc dans tous les systèmes impliquant des cercles, des roues, des sphères en rotation.

Tout signal, vérifiant certaines propriétés, peut être décrit par une somme (généralement infinie) de fonctions sinus et cosinus de différentes fréquences : c'est l'idée de base de l'analyse de Fourier, dans laquelle les séries trigonométriques sont utilisées pour résoudre de nombreux problèmes aux valeurs limites dans des équations aux dérivées partielles.

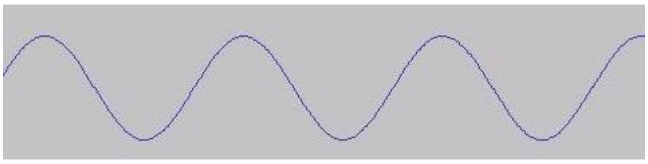
Un exemple très connu : les ondes sonores

Lorsque vous ouvrez un fichier sonore sur votre ordinateur, il y a souvent un logiciel qui s'ouvre et affiche des ondes, qui battent en rythme selon la musique écoutée…
Ceux qui font de la Musique Assistée par Ordinateur (M.A.O.) voient des ondes partout :



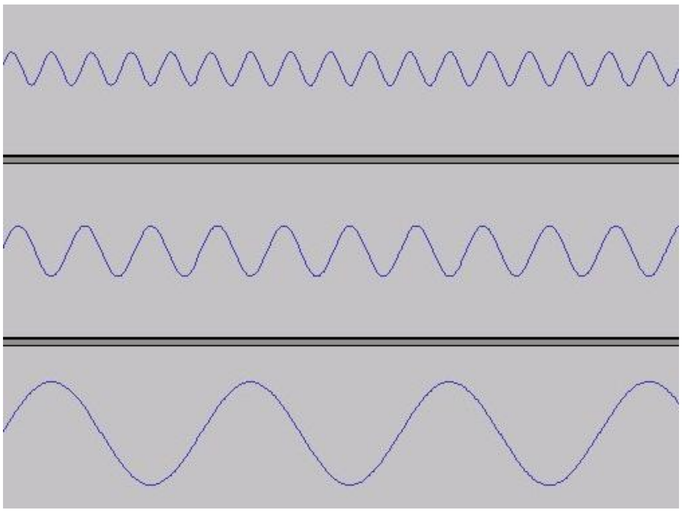
Voici quelques explications sur les harmoniques, tirées d'abord du complément sur les gammes associé au DM sur la série harmonique, puis du site www.lyceedadultes.fr :

Un son parfaitement sinusoïdal et sans aucun harmonique (« pur ») ressemble à ça, vu à l'oscilloscope :



et sonne comme ça : http://didierdescamps.free.fr/solfege/la_sin.wav

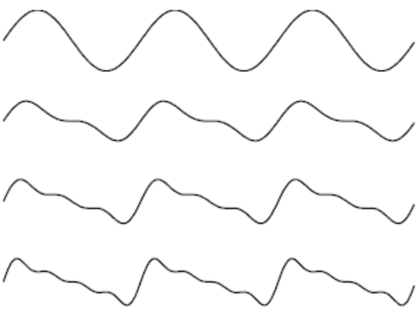
Le même avec deux harmoniques aux fréquences 3 et 5 :



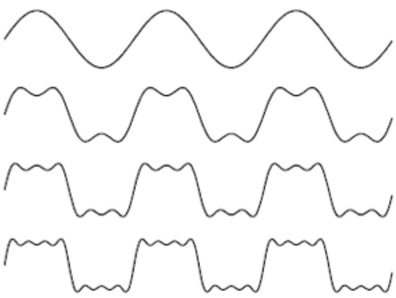
Les mêmes, mais maintenant réunis en un son unique :

qui sonne ainsi :
http://didierdescamps.free.fr/solfege/la_timbre.wav

Autre exemple :



ajout des harmoniques 1, 2, 3, 4
(modèle simplifié d'un son de violon)



ajout des harmoniques 1, 3, 5, 7
(modèle simplifié d'un son de clarinette)

Un son pur, et ce même son auquel on ajoute ses harmoniques de rang 2, 3 et 4 :
http://ssl7.ovh.net/~pianoteq/philippe/SONS/ajoutharm1.wav

Un son pur, et ce même son auquel on ajoute ses harmoniques de rang 3, 5 et 7 :
http://ssl7.ovh.net/~pianoteq/philippe/SONS/ajoutharm2.wav

Le signal en "dents de scie", une des formes d'ondes fréquemment utilisées pour la synthèse sonore, a pour expresion :

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left[2\pi\, k\mathrm{F}\, t + (k-1)\pi\right]}{k} \quad \text{avec} \quad n \to +\infty$$

Si on s'intéresse aux 5 premières harmoniques avec une fréquence fondamentale $\mathrm{F} = 1$, on a alors la fonction f_6 :

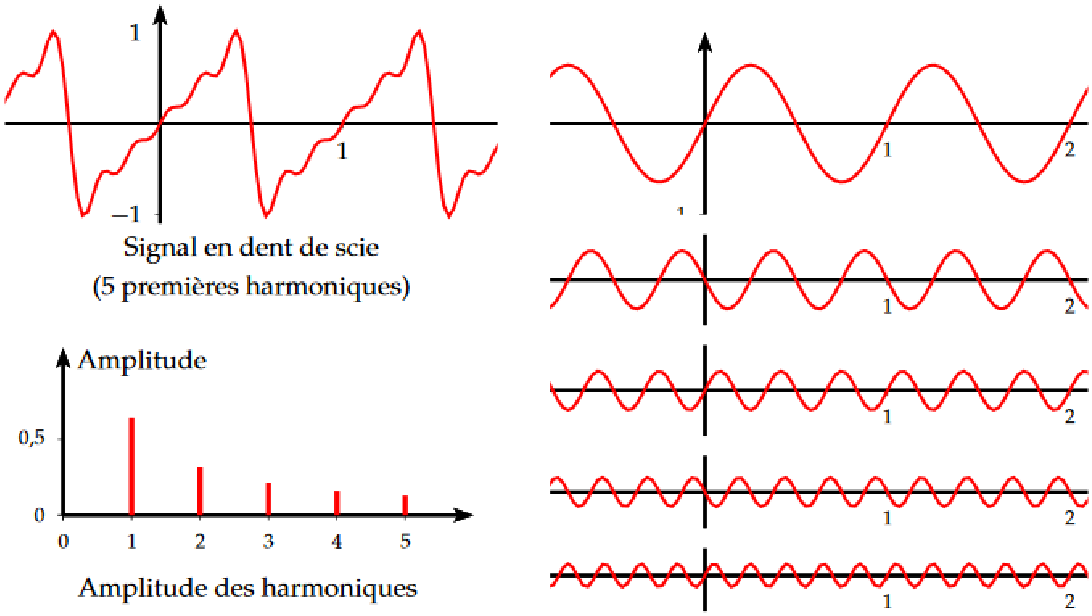
$$f_5(t) = \frac{2}{\pi}\left[\sin(2\pi\, t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi\, t + \pi) + \frac{1}{3}\sin(6\pi\, t) + \frac{1}{4}\sin(8\pi\, t + \pi) + \frac{1}{5}\sin(10\pi\, t)\right]$$

On observe que deux harmoniques successives sont en opposition de phase.

Si on trace la fonction f_5, on observe clairement une courbe qui ressemble à une courbe en "dent de scie". En ajoutant une douzaine d'autres termes, on obtiendrait alors une meilleure approximation.

Algorithme : Tracer f_5 avec les 5 harmoniques

On observe alors la superposition des 5 harmoniques ainsi que le spectre de fréquence

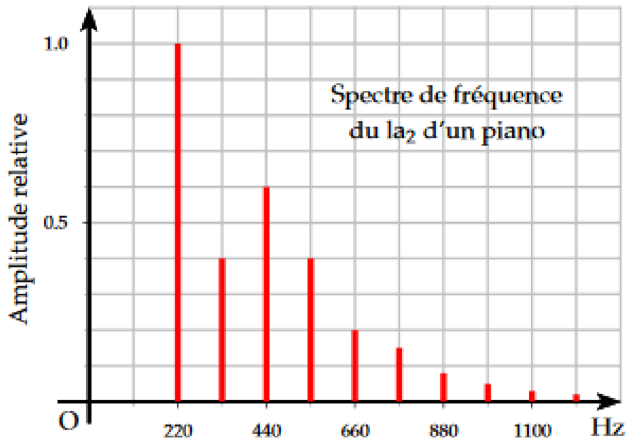


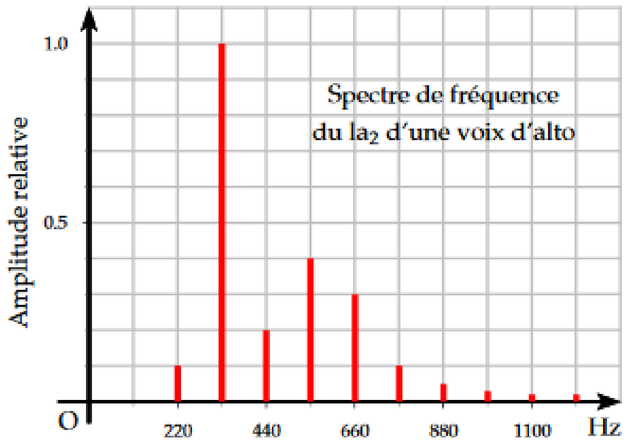
Signal en dent de scie
(5 premières harmoniques)

Amplitude des harmoniques

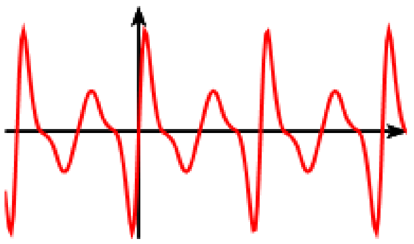
Deux instruments jouant la même note sont reconnaissables par le timbre : assemblage unique d'harmoniques. Une note produit par un piano a un spectre de fréquence très différent de celle d'un chanteur et l'oreille distingue facilement le chanteur de l'accompagnement piano.

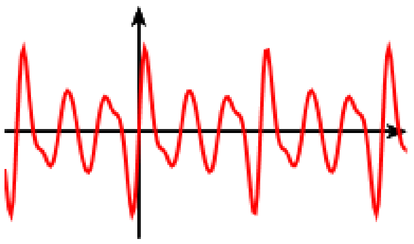
Remarque : La deuxième harmonique correspond à l'octave ($F_2 = 2F$) et la troisième à la quinte ($F_3 = 3F$)

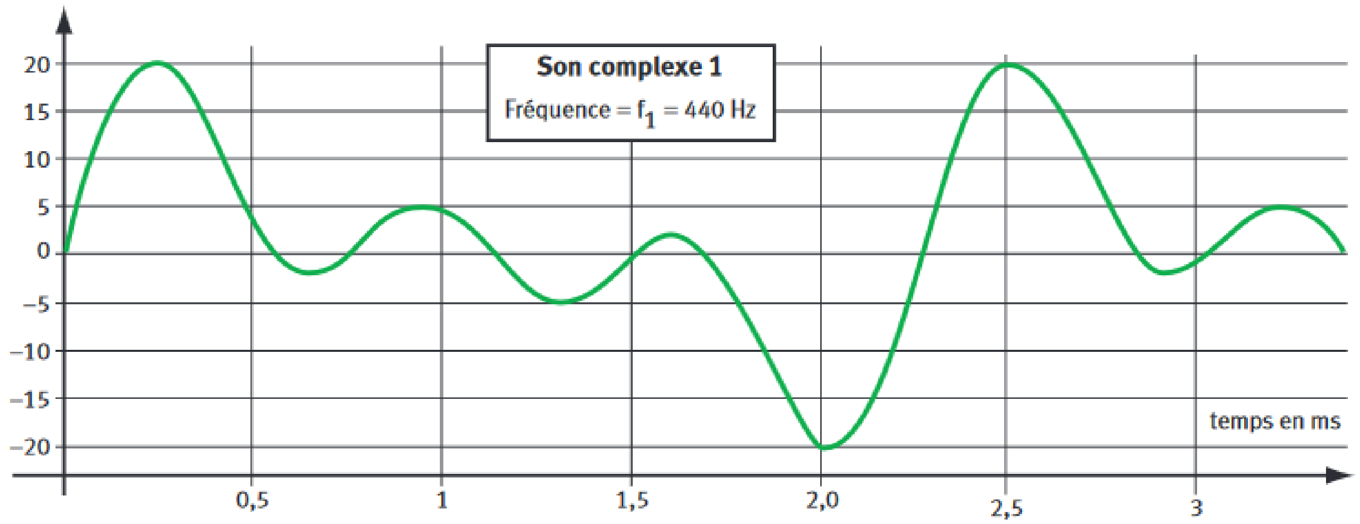




On obtient les profils suivants des ondes produites par le piano et par une voix d'alto :







Voir l'EXCELLENT, passionnant dossier de Paul Milan sur les sons et la musique, c'est un cours de spécialité physique-chimie de Terminale S :

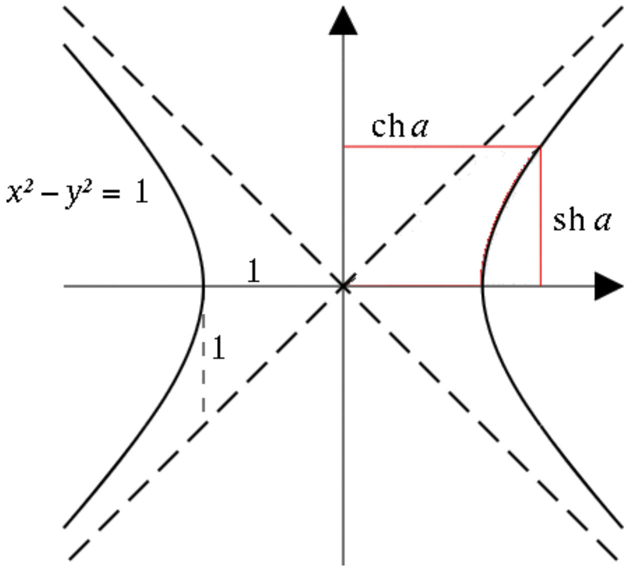
www.academie-en-ligne.fr/Ressources/7/SP03/AL7SP03TEPA0013-Sequence-01.pdf

Complément n°3 : et la trigonométrie hyperbolique ?

Pour expliquer l'origine des fonctions trigonométriques, on est parti d'un cercle de rayon 1 (un cercle unitaire). Ce sont les fonctions trigonométriques circulaires (sinus, cosinus…).

Mais on peut partir d'une autre forme géométrique.

Si on part d'une hyperbole,
on obtient la trigonométrie hyperbolique :



Le principe est le même que pour le cercle : il suffit de prendre un point sur la courbe et son ordonnée correspond à son sinus hyperbolique (noté $\text{sh}(x)$ ou $\sinh(x)$) et son abscisse correspond à son cosinus hyperbolique (noté $\text{ch}(x)$ ou $\cosh(x)$).

Sources : http://couleur-science.eu/?d=2015/06/27/21/55/04-les-fonctions-trigonometriques et Wikipedia

Mais ce qui est encore plus beau, c'est qu'on retrouve des formules similaires à la trigonométrie circulaire, et l'exponentielle se fait toute belle pour apparaître comme par enchantement :

$$\text{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$$

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2.\cos^2 a - 1\\ &= 1 - 2.\sin^2 a\\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\\ \sin 2a &= 2.\sin a.\cos a\end{aligned}$$

$$\cos' x = -\sin x$$
$$\sin' x = \cos x$$

$$\text{ch}(a+b) = \text{ch}\, a.\text{ch}\, b + \text{sh}\, a.\text{sh}\, b$$
$$\text{ch}(a-b) = \text{ch}\, a.\text{ch}\, b - \text{sh}\, a.\text{sh}\, b$$
$$\text{sh}(a+b) = \text{sh}\, a.\text{ch}\, b + \text{sh}\, b.\text{ch}\, a$$
$$\text{sh}(a-b) = \text{sh}\, a.\text{ch}\, b - \text{sh}\, b.\text{ch}\, a$$

$$\begin{aligned}\text{ch}\, 2a &= 2.\text{ch}^2 a - 1\\ &= 1 + 2.\text{sh}^2 a\\ &= \text{ch}^2 a + \text{sh}^2 a\\ \text{sh}\, 2a &= 2.\text{sh}\, a.\text{ch}\, a\end{aligned}$$

$$\text{ch}' x = \text{sh}\, x$$
$$\text{sh}' x = \text{ch}\, x$$