Autour de la notion de plan

Principe « Les plans sont à l'espace ce que les droites sont au plan »

Existence d'un plan

Trois points A, B, C de l'espace forment un plan si, et seulement si, ils ne sont pas alignés.

- Méthode 1 : On vérifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (par exemple) ne sont pas colinéaires. Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles
- Méthode 2 : On évalue l'angle $\widehat{BAC}$ (par exemple à l'aide de la définition du produit scalaire et on vérifie que cet angle n'est ni **nul** ni **plat**.

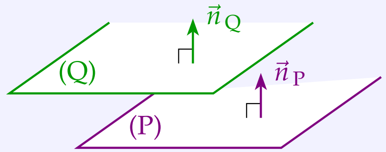
Deux plan (P) et (Q) de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ sont orthogonaux si, et seulement si : $\vec{n} \cdot \vec{n}\,' = 0$

Position relative de deux plan de l'espace

1er cas : Les plans (P) et (Q) sont parallèles.

$$(\text{P}) \,//\, (\text{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\text{P}} \text{ et } \vec{n}_{\text{Q}} \text{ colinéaires.}$$

Cas particulier : (P) et (Q) sont confondus ; ils admettent alors des équations cartésiennes proportionnelles.



2e cas : Les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite.
Par conséquent, on sait donner une équation paramétrique de cette droite.

⚠ Dans l'espace, l'équation $2x + y + 4 = 0$ est l'équation d'un **plan**

une description paramétrique
Elle n'est pas unique !

Un plan (P) est la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires qui constitue une base du plan.
On peut noter ce triplet $(\text{A}\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$
On traduit que : $\overrightarrow{\text{AM}}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

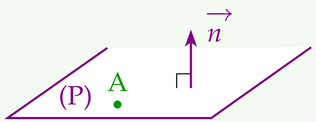
$$\begin{aligned}
\text{M} \in (\text{P}) \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\text{AM}} = t\vec{u} + s\vec{v} \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x - x_{\text{A}} \\ y - y_{\text{A}} \\ z - z_{\text{A}} \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_{\text{A}} + a\,t + \alpha\,s \\ y = y_{\text{A}} + b\,t + \beta\,s \\ z = z_{\text{A}} + c\,t + \gamma\,s \end{cases}
\end{aligned}$$

une description cartésienne

Un plan est aussi entièrement déterminé par un point A et un vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$.

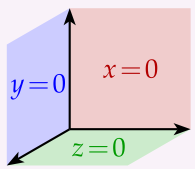
$$\begin{aligned}
\text{M} \in (\text{P}) \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{où } \text{M}(x\,;\,y\,;\,z) \\
&\Leftrightarrow \quad ax + by + cz + d = 0
\end{aligned}$$

équation cartésienne du plan



Quelques plans particuliers :
les plans de coordonnées.

Plus généralement, les plans parallèles au plan $(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admettent une équation de la forme : $z = k$ où $k \in \mathbb{R}$ etc.



Un autre cas particulier : le plan médiateur d'un segment [AB].

Caractérisation : $\text{M} \in (\text{P}) \Leftrightarrow \text{MA} = \text{MB}$

Soit I le milieu de [AB] :

$$\text{I}\left(\frac{x_{\text{A}} + x_{\text{B}}}{2}\,;\,\frac{y_{\text{A}} + y_{\text{B}}}{2}\,;\,\frac{z_{\text{A}} + z_{\text{B}}}{2}\right)$$

$$\text{M} \in (\text{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\text{IM}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 0$$

* Voir complément au verso

Complément

Distance d'un point A à un plan (P) : "*distance la plus courte*".

- Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

$$\overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires } \textbf{et } H \in (P)$$

- Par définition, $d(A\,,(P)) = AH$ où $AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$
- Soit l'équation cartésienne du plan (P) : $ax + by + cz + d = 0$, et M un point du plan, alors :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$