R.O.C. : exemples posés au baccalauréat

Suites

Liban (juin 2008), exercice 3

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.
« une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».
Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Dérivation

Métropole (septembre 2007), exercice 1

1. Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposées connue.
On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse, et justifier.
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.
- P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x)=nx^{n-1}$.
- Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f=u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f'=nu^{n-1}$.

Fonction logarithme népérien

ANTILLES-GUYANE (JUIN 2006), EXERCICE 1

1. **Restitution organisée des connaissances**

   Pré-requis :

   — la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$.

   — $\ln(1) = 0$

   Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x,

   $$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$

2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que

   $$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ et que } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

   pour tous réels strictement positifs a et b.

LA RÉUNION (JUIN 2007), EXERCICE 1

2. **Restitution organisée de connaissances**

   On suppose connue la propriété :
   « Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »
   En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln\left(\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$.

Amérique du sud (novembre 2008), exercice 3

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, positive sur $[1\ ;\ +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0{,}69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Antilles-Guyane (septembre 2010), exercice 1

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.
À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

Amérique du nord (mai 2012), exercice 2

Partie A Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Intégration

PONDICHÉRY (AVRIL 2010), EXERCICE 1

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Centres étrangers (juin 2006), exercice 1

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r & > & 0 \end{array}\right.$$

ii. Pour tous nombres réels a et b :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{array}\right.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Centres étrangers (juin 2007), exercice 2

I. Restitution organisée de connaissances

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

La Réunion (juin 2010), exercice 4

Partie I : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.

Montrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

LIBAN (MAI 2011), EXERCICE 3

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On suppose connu le résultat suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', $\arg\left(z \times z'\right) = \arg(z) + \arg\left(z'\right)$ à 2π près.

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', on a : $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg\left(z'\right)$ à 2π près.

PONDICHÉRY (AVRIL 2012), EXERCICE 4

Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z. On admet l'égalité : $|z|^2 = z\overline{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

MÉTROPOLE (JUIN 2014), EXERCICE 3

3. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$ où $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$.

Démontrer que :

– Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

– Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Géométrie dans l'espace

Nouvelle-Calédonie (mars 2007), exercice 1

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. *Question de cours*
   Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}\,(a,\ b,\ c)$ et un point $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$.

Métropole (septembre 2011), exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par a, b, c, d quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul.
On appelle P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan P.

Antilles-Guyane (septembre 2013), exercice 1

Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et soit P un plan.
On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\vec{u}_1$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\vec{u}_2$.
Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et D_2.

Probabilités

Conditionnement, indépendance

Centres étrangers (juin 2009), exercice 1

1. Restitution organisée de connaissances :

Prérequis : On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})$.

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire.

a) Démontrer que $p(\mathrm{B})=p(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})+p(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{A}})$.

b) Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les événements $\overline{\mathrm{A}}$ et B le sont également.

Notion de loi à densité à partir d'exemples

Nouvelle-Calédonie (mars 2014), exercice 2

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha) = 1-\alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$H(x)=P(-x\leqslant X\leqslant x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?
2. Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. À l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x, $H(x)=2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\,;\,+\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0\,;\,+\infty[$.
5. Démontrer alors le théorème énoncé.

PONDICHÉRY (AVRIL 2014), EXERCICE 1 ET ANTILLES-GUYANE (JUIN 2016)

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
   On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.
   Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

2. a. Déterminer $P(X \geqslant 3)$.
   b. Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$.

ANTILLES-GUYANE (JUIN 2015), EXERCICE 2

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right).$$

2. En déduire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Asie (juin 2015), exercice 1

2. *Restitution organisée des connaissances*

Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $\mathrm{E}(T) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t$.

a. On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

b. En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

Antilles-Guyane (juin 2016), exercice 1

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x$.

a. Montrer que $P(T \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a

$$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t + a) = P(T \geqslant a).$$

Intervalle de fluctuation et estimation

Antilles-Guyane (juin 2013), exercice 2

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $\mathrm{F}_n = \frac{\mathrm{X}_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.