

INTÉGRATION ET PRIMITIVES : EXERCICES SUPP.

Exercice 1

$$f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x^2} \text{ donc } F(x) = 3 \frac{x^2}{2} - x - 2 \times \frac{1}{x} + k \text{ ie } F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x} + k.$$

$$F(1) = 0 \text{ donc } \frac{3}{2} - 1 - 2 + k = 0 \text{ donc } k = \frac{3}{2} : F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}.$$

Exercice 2

On notera ici, si f est la fonction à étudier, f_p une de ses primitives.

- $a(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

$$a_p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \ln(x)$$

- $b(x) = \frac{3}{3x-4}$ sur $\left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$

$$b_p(x) = \ln(|3x-4|) = \ln(3x-4)$$

- $c(x) = e^{-x}$ sur \mathbb{R}

$$c(x) = -(-1 \times e^{-x}) \text{ donc } c_p(x) = -e^{-x}$$

- $d(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ sur \mathbb{R}

$$d_p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

- $e(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

$$e_p(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x}$$

- $f(x) = 2x + 1$ sur \mathbb{R}

$$f_p(x) = x^2 + x$$

- $g(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$ sur \mathbb{R}

$$g_p(x) = 10 \frac{x^5}{5} + 6 \frac{x^4}{4} - x = 2x^5 + \frac{3}{2}x^4 - x$$

- $h(x) = (x-1)(x+3)$ sur $I = \mathbb{R}$

$$h(x) = x^2 + 2x - 3 \text{ donc } h_p(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$$

- $i(x) = -\frac{4}{3x^5}$

$$i(x) = -\frac{4}{3}x^{-5} \text{ donc } i_p(x) = -\frac{4}{3} \frac{x^{-4}}{-4} = \frac{x^{-4}}{3} = \frac{1}{3x^4}$$

- $j(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

$$j_p(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}$$

- $k(x) = 3(3x+1)^4$ sur \mathbb{R}

k est de la forme $u'u^4$ donc $k_p = \frac{1}{5}u^5$:

$$k_p(x) = \frac{1}{5}(3x+1)^5$$

- $l(x) = 16(4x-1)^3$ sur \mathbb{R}

$$l(x) = 4 \times 4(4x-1)^3$$

donc l est de la forme $4u'u^3$

donc $l_p = 4 \times \frac{1}{4}u^4 = u^4$:

$$l_p(x) = (4x-1)^4$$

- $m(x) = \frac{4}{(1+4x)^2}$ sur $\left] -\infty; -\frac{1}{4} \right[$

m est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ donc $m_p = -\frac{1}{u}$:

$$m_p(x) = \frac{-1}{1+4x}$$

- $n(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$ sur $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$

$$n(x) = 3 \times \frac{2}{(2x+1)^2}$$

donc n est de la forme $3 \frac{u'}{u^2}$

donc $n_p = 3 \times \frac{-1}{u} = \frac{-3}{u}$:

$$n_p(x) = \frac{-3}{2x+1}$$

- $o(x) = (6x-2)(3x^2-2x+3)^5$ sur \mathbb{R}
 o est de la forme $u'u^5$ donc $o_p = \frac{1}{6}u^6$:

$$o_p(x) = \frac{1}{6}(3x^2-2x+3)^6$$

- $p(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$ sur $]-\frac{3}{4}; +\infty[$

$$p(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{(4x+3)^2}$$

donc p est de la forme $\frac{1}{4} \times \frac{u'}{u^2}$

donc $p_p = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{-1}{4u}$:

$$p_p(x) = \frac{-1}{4(4x+3)} = \frac{-1}{16x+12}$$

- $q(x) = \frac{2}{(4-3x)^2}$ sur $]\frac{4}{3}; +\infty[$

q ressemble presque à $\frac{u'}{u^2}$, on souhaiterait donc

avoir $\frac{-3}{(4-3x)^2}$. Faisons-le apparaître :

$$q(x) = \frac{2}{-3} \times \frac{-3}{(4-3x)^2}$$

donc $q = \frac{2}{-3} \times \frac{u'}{u^2}$ d'où $q_p = \frac{2}{-3} \times \frac{-1}{u}$

donc $q_p(x) = \frac{2}{-3} \times \frac{-1}{4-3x} = \frac{2}{3(4-3x)} = \frac{2}{12-9x}$

- $r(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ sur $]-\infty; 0[$

$$r(x) = -\frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$$

donc r est de la forme $-u'u^4$

donc $r_p = -\frac{1}{5}u^5$: $r_p(x) = -\frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5$

- $s(x) = \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$ sur $]2; 3[$

$$s(x) = 2 \times \frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2}$$

donc s est de la forme $2 \frac{u'}{u^2}$

donc $s_p = 2 \times \frac{-1}{u}$:

$$s_p(x) = 2 \frac{-1}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x^2-5x+6}$$

- $t(x) = \frac{5}{(2x+1)^3}$ sur $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$$t(x) = \frac{5}{2} \times \frac{2}{(2x+1)^3}$$

donc t est de la forme $\frac{5}{2} \frac{u'}{u^3} = \frac{5}{2} u' u^{-3}$

donc $t_p = \frac{5}{2} \times \frac{1}{-2} u^{-2} = -\frac{5}{4u^2}$:

$$t_p(x) = -\frac{5}{4(2x+1)^2}$$

- $u(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$

$$u(x) = \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

donc u est de la forme $v'v$

donc $u_p = \frac{1}{2}v^2 = \frac{v^2}{2}$:

$$u_p(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

- $v(x) = \sqrt{e^{-3x}}$ sur \mathbb{R}

$$v(x) = (e^{-3x})^{\frac{1}{2}} = \frac{-2}{3} \times \frac{-3}{2} e^{-\frac{3}{2}x}$$

donc v est de la forme $\frac{-2}{3} u' e^u$

donc $v_p = \frac{-2}{3} e^u$: $v_p(x) = \frac{-2}{3} e^{-\frac{3}{2}x}$

- $w(x) = \frac{3}{\sqrt{x+2}}$ sur $]-2; +\infty[$

$$w(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

donc w est de la forme $6 \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

donc $w_p = 6\sqrt{u}$: $w_p(x) = 6\sqrt{x+2}$

- $M(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ sur \mathbb{R}

$$M \text{ est de la forme } \frac{u'}{\sqrt{u}}$$

donc $M_p = 2\sqrt{u}$: $M_p(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$

- $y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1; +\infty[$

$$y(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

- $z(x) = 3e^{-4x}$ sur \mathbb{R}
 $z(x) = \frac{3}{-4} \times (-4)e^{-4x}$

donc z est de la forme $\frac{3}{-4}u'e^u$

donc $z_p = \frac{3}{-4}e^u$: $z_p(x) = -\frac{3}{4}e^{-4x}$

- $A(x) = \frac{1}{4}e^x$ sur \mathbb{R}

$A_p(x) = A(x)$

- $B(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $]-\infty; \frac{5}{3}[$

$B(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x-5}$

donc B est de la forme $\frac{1}{3} \frac{u'}{u}$

donc $B_p = \frac{1}{3} \ln(|u|)$:

$B_p(x) = \frac{1}{3} \ln(|3x-5|)$

or, sur $]-\infty; \frac{5}{3}[$, $3x-5 < 0$ (à démontrer)

donc $B_p(x) = \frac{1}{3} \ln(-3x+5)$

- $C(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur \mathbb{R}

$C(x) = \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$

donc C est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$

donc $C_p = \frac{1}{2} \ln(|u|)$: $C_p(x) = \frac{1}{2} \ln(|x^2+2x+2|)$

or, $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ donc $x^2+2x+2 > 0$:

$C_p(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2)$

- $D(x) = xe^{x^2}$ sur \mathbb{R}

$D(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$

donc D est de la forme $\frac{1}{2}u'e^u$

donc $D_p = \frac{1}{2}e^u$: $D_p(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

donc y est de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

donc $y_p = \sqrt{u}$: $y_p(x) = \sqrt{x^2-1}$

- $E(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ sur \mathbb{R}

E est de la forme $\frac{u'}{u}$ donc $E_p = \ln(|u|)$:

$E_p(x) = \ln(|e^x+1|) = \ln(e^x+1)$ (car $e^x+1 > 0$)

- $F(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $]-1; 1[$

$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2-1}$

donc F est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$

donc $F_p = \frac{1}{2} \ln(|u|)$:

$F_p(x) = \frac{1}{2} \times \ln(|x^2-1|)$

or $x^2-1 < 0$ sur $]-1; 1[$ (à démontrer)

donc $F_p(x) = \frac{1}{2} \times \ln(1-x^2)$

- $G(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]1; +\infty[$

$G(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$

donc G est de la forme $\frac{u'}{u}$

donc $G_p = \ln(|u|)$: $G_p(x) = \ln(|\ln(x)|)$

or, $\ln(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ (à démontrer)

donc $G_p(x) = \ln(\ln(x))$

- $H(x) = e^{-2x+3}$ sur \mathbb{R}

$H(x) = \frac{1}{-2} \times (-2)e^{-2x+3}$

donc H est de la forme $\frac{1}{-2}u'e^u$

donc $H_p = \frac{1}{-2}e^u$: $H_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$

- $I(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$

$I_p(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ln(|x|)$

or $|x| = -x$ sur $]-\infty; 0[$ donc

$I_p(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \ln(-x)$

• $J(x) = x e^{-x^2}$ sur \mathbb{R}

$$J(x) = \frac{1}{-2} \times (-2x) e^{-x^2}$$

donc J est de la forme $\frac{1}{-2} u' e^u$

donc $J_p = \frac{1}{-2} e^u$: $J_p(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

• $K(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$

$$K_p(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

• $L(x) = \frac{1}{4x}$ sur $] -\infty; 0[$

$$L(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{4x}$$

donc L est de la forme $\frac{1}{4} \frac{u'}{u}$

donc $L_p = \frac{1}{4} \ln(|u|)$: $L_p(x) = \frac{1}{4} \ln(|4x|)$

or $4x < 0$ sur $] -\infty; 0[$

donc $L_p(x) = \frac{1}{4} \ln(-4x)$

Exercice 3

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 4}{x - 2}$$

On cherche à écrire $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{x - 2}$.

En simplifiant, on aurait donc $f(x) = \frac{ax^2 + (-2a + b)x - 2b + c}{x - 2}$ et donc, par identification (à faire) :

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -2.$$

D'où : $f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x - 2}$.

Une primitive de f est alors : $F(x) = x^2 + x - 2 \ln(|x - 2|)$

Or $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ donc sur $[4; +\infty[$: $F(x) = x^2 + x - 2 \ln(x - 2)$.