Démonstrations du chapitre « Limites et fonctions», surtout pour les curieux, car dans ce chapitre aucune démonstration n'est citée comme « intéressante » dans le programme officiel... je vous mets en rouge tout de même une situation intéressante que nous retrouverons dans l'année sous forme de ROC.

1) Propriétés concernant les opérations sur les limites :

Les tableaux concernant les sommes, produit, quotient sont à connaître par cœur, voici trois preuves concernant les opérations sur limites en l'infini, les autres pouvant s'en déduire, ce qui peut constituer un bon entraînement pour un exercice ROC :

a) **Énoncé :**

si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\text{L}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x))=+\infty$

Preuve:

Soit B un réel fixé quelconque (strictement positif).

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\text{L}$, il existe un réel A_1 tel que pour tout $x\geqslant A_1$: $L-1\leqslant g(x)\leqslant L+1$.

De plus, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, il existe un réel A_2 , tel que pour tout $x\geqslant A_2$: $B-(L-1)\leqslant f(x)$.

Soit A le plus grand des deux nombres A_1 et A_2 , les inégalités de même sens s'ajoutant :

$L-1+B-(L-1)\leqslant g(x)+f(x)$ autrement dit : $f(x)+g(x)\geqslant B$.

On vient donc de prouver que $f+g$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

b) **Énoncé :**

si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L$ (où $L<0$) alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)\times g(x))=-\infty$

Preuve:

Soit B un réel fixé quelconque, ***strictement négatif***.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\text{L}$, il existe un réel A_1 tel que pour tout $x\geqslant A_1$: $L-\frac{L}{2}\leqslant g(x)\leqslant L+\frac{L}{2}$, soit $\frac{L}{2}\leqslant g(x)\leqslant\frac{3L}{2}$,

et au passage, ***cette inégalité ne concerne que des nombres négatifs !!! et celle – ci uniquement des nombres positifs :*** $\frac{-L}{2}\geqslant -g(x)\geqslant\frac{-3L}{2}$

De plus, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, il existe un réel A_2 , tel que pour tout $x\geqslant A_2$: $\frac{2\times(-B)}{-3L}\leqslant f(x)$.

Soit A le plus grand des deux nombres A_1 et A_2 , les inégalités ***positives*** de même sens se multipliant :

$\frac{2\times(-B)}{-3L}\times\frac{-3L}{2}\leqslant f(x)\times(-g(x))$ autrement dit : $-f(x)\times g(x)\geqslant -B$, ou encore $f(x)\times g(x)\leqslant B$

<u>On vient donc de prouver que $f\times g$ a pour limite $-\infty$ en $+\infty$.</u>

c) **Énoncé :**

si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ (où $L>0$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ (de manière à ce que $g(x)$ demeure strictement positif) alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=+\infty$

Preuve:

Soit B un réel fixé quelconque (***strictement positif***).

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\text{L}$, il existe un réel A_1 tel que pour tout $x\geqslant A_1$: $L-\frac{L}{2}\leqslant f(x)\leqslant L+\frac{L}{2}$. soit $\frac{L}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{3L}{2}$,

inégalité qui ne concerne que ***des nombres strictement positifs***.

De plus, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, il existe un réel A_2 , tel que pour tout $x\geqslant A_2$: $\frac{-L}{2B}\leqslant g(x)\leqslant\frac{L}{2B}$, que l'on peut affiner en : $0<g(x)\leqslant\frac{L}{2B}$ étant donné que g est une fonction strictement positive.

La fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$: $\frac{1}{g(x)}\geqslant\frac{2B}{L}$

Soit A le plus grand des deux nombres A_1 et A_2 , les inégalités ***positives*** de même sens se multipliant :

autrement dit : $f(x)+g(x)\geqslant B$.

$\frac{L}{2} \times \frac{2B}{L} \leqslant f(x) \times \left(\frac{1}{g(x)}\right)$ autrement dit : $B \leqslant \frac{f(x)}{g(x)}$. On vient donc de prouver que $\frac{f}{g}$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

2) Théorème des gendarmes :

Énoncé :

Si pour x assez grand on a $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = L$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut L.

Preuve:

Soit e un réel strictement positif fixé quelconque.

Supposons que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = L$, et donc que :

Il existe un réel A_1, tel que si $x \geqslant A_1$ alors $L-e \leqslant u(x) \leqslant L+e$

Il existe un réel A_2, tel que si $x \geqslant A_2$ alors $L-e \leqslant v(x) \leqslant L+e$.

Or, il existe un réel A, tel que si $x \geqslant A$ alors $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$.

Soit A_0 le plus grand des trois nombres A,A_1et A_2.

Ainsi, pour tout réel *x* supérieur à la fois à A0, on a : $L-e \leqslant u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x) \leqslant L+e$

On vient donc de prouver que *f* a pour limite L en $+\infty$

3) Théorèmes de limite par comparaison :

a) Par minoration :

Enoncé :

Si pour *x* assez grand on a $f(x) \geqslant u(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut $+\infty$.

Preuve :

Soit B un réel fixé quelconque,

Supposons que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, et donc que :

Il existe un réel A_1, tel que si $x \geqslant A_1$ alors $u(x) \geqslant B$

Or, il existe un réel A, tel que si $x \geqslant A$ alors $f(x) \geqslant u(x)$.

Soit A_0 le plus grand des deux nombres A_1 et A

Alors, pour tout réel *x* supérieur à A_0, on a :

$$f(x) \geqslant u(x) \geqslant B$$

On vient donc de prouver que *f* a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

b) Par majoration :

Enoncé :

Si pour *x* assez grand on a $f(x) \leqslant u(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut $-\infty$.

Preuve :

Soit B un réel fixé quelconque,

Supposons que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$, et donc que :

Il existe un réel A_1, tel que si $x \geqslant A_1$ alors $u(x) \leqslant B$

Or, il existe un réel A, tel que si $x \geqslant A$ alors $f(x) \leqslant u(x)$.

Soit A_0 le plus grand des deux nombres A_1 et A

Alors, pour tout réel *x* supérieur à A_0, on a :

$$f(x) \leqslant u(x) \leqslant B$$

On vient donc de prouver que *f* a pour limite $+\infty$ en $-\infty$.