Limites de suites

"Contretemps" :
les formes indéterminées

$+\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty}$

Il faut savoir les identifier puis les lever.

Théorèmes d'existence de la limite

- Une suite croissante **et** majorée par un réel M **converge** vers un réel $\ell \leqslant M$
- Une suite décroissante **et** minorée par un réel m **converge** vers un réel $\ell \geqslant m$

⚠ Si la limite existe, elle est unique

Ces théorèmes ne sont pas effectifs

⚠ **À connaître**

Les limites de référence.

Notamment

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$ si $q = 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas si $q \leqslant -1$

Soit (u_n) une suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

Feuille de route

En général, dans le cas des suites récurrente d'ordre 1, on utilise un théorème d'existence de la limite ℓ.

On dispose alors d'une méthode explicite pour déterminer la valeur de ℓ. On résout $f(x) = x$, ℓ appartient alors à l'ensemble solution de cette équation.

- La suite est explicite : dans ce cas, on passe à la limite directement
- **Autres outils**
  1) Le théorème des gendarmes pour prouver la convergence.
  2) Le théorème de comparaison qui permet de montrer que la suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$
- Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$

Détermination explicite de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Les théorèmes ou méthodes permettent de conclure.