DEVOIR SURVEILLE de MATHEMATIQUES n°6

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1 [............ / 11,5 *(1 + 1) + 1 + (0,5 + 1,5 + 0,5 + 1) + (2,5 + 1,5 + 1)*] *env. 35 min*

1. a) L'aire du rectangle est 450 donc : $xy=450$. D'où : $y=\frac{450}{x}$.

b) Périmètre du rectangle : $x+2y=x+2\times\frac{450}{x}=x+\frac{900}{x}$.

2. On trace la courbe représentative de *f* sur notre calculatrice, en réglant la fenêtre graphique.
On appuie ensuite sur les touches G-SLV / MIN, et on trouve que la fonction *f* semble admettre un minimum sur $]0;100]$, égal à 60.

3. a) $f(30)=30+\frac{900}{30}=30+30=60$

b) Pour tout x de $]0;100]$: $(x-30)^2\geqslant 0$ et $x\geqslant 0$, d'où $\frac{(x-30)^2}{x}\geqslant 0$ *ie* $f(x)-f(30)\geqslant 0$.
On en déduit : $f(x)\geqslant f(30)$.

c) On peut donc en déduire que *f* admet $f(30)=60$ comme minimum sur $]0;100]$.

d) Les dimensions du terrain pour que la clôture qui l'entourera soit de longueur minimale sont :

$$x=30 \text{ m et } y=\frac{450}{x}=\frac{450}{30}=15 \text{ m.}$$

4. a)

x	$-\infty$		0		15		60		$+\infty$
$x-60$		$-$	⋮	$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$x-15$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	
x		$-$	0	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
$f(x)-f(60)$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution de l'inéquation $\frac{(x-60)(x-15)}{x}\geqslant 0$ est : $]0;15]\cup[60;+\infty[$.

b) Pour tout réel $x\neq 0$:

$$f(x)-f(60)=x+\frac{900}{x}-75=\frac{x^2+900-75x}{x} \text{ et } \frac{(x-60)(x-15)}{x}=\frac{x^2-15x-60x+900}{x}=\frac{x^2+900-75x}{x}$$

d'où $f(x)-f(60)=\frac{(x-60)(x-15)}{x}$.

c) La clôture aura une longueur supérieure ou égale à 75 m lorsque *x* appartient à $]0;15]\cup[60;100]$.

Exercice 2 [........... / 3] *env. 5 min*

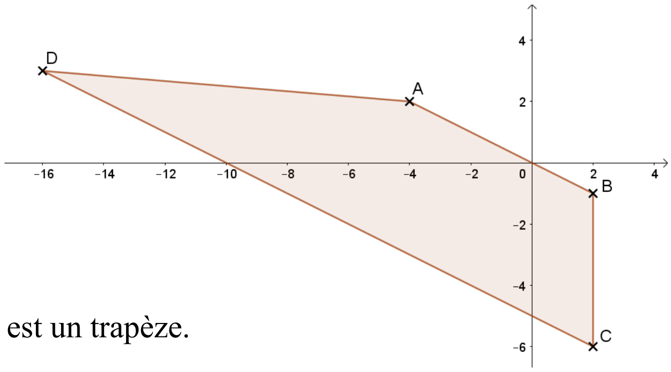
$$\begin{cases}-3x+4y=5\\5x-7y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-15x+20y=25 & (\text{x}5)\\15x-21y=-12 & (\text{x}3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-15x+20y=25\\20y-21y=25-12 & (\text{L1+L2})\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-15x+20\times(-13)=25\\y=-13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(25+260)\div(-15)=-19\\y=-13\end{cases}$$

Donc l'unique solution de ce système est : $x=-19$ et $y=-13$.

Exercice 3 [........... / 9 *(1 + 0,5) + 2 + (1 + 2) + (1,5 + 1)*] *env. 25 min*

$A(-4;2)$, $B(2;-1)$, $C(2;-6)$ et $D(-16;3)$.



1. a) Coeff. directeur de (AB) : $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\ldots=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$.

Coeff. directeur de (DC) : $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\ldots=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$.

b) On en déduit que : (AB) // (DC). Par conséquent, ABCD est un trapèze.

2. Coeff. directeur de (BD) : $\dfrac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\ldots=\dfrac{4}{-18}=-\dfrac{2}{9}$.

L'équation réduite de (BD) est donc $y=-\dfrac{2}{9}x+b$ où $b\in\mathbb{R}$.

$B\in(BD)$ donc : $-1=-\dfrac{2}{9}\times 2+b$ d'où $b=-1+\dfrac{4}{9}=-\dfrac{5}{9}$.

L'équation réduite de (BD) est donc $y=-\dfrac{2}{9}x-\dfrac{5}{9}$.

3. a) $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{10}{3} \Leftrightarrow 3y=-4x-10 \Leftrightarrow 4x+3y=-10$

b) Méthode 1 : résoudre le système $\begin{cases}4x+3y=-10\\-2x-9y=5\end{cases}$. Méthode 2 : résoudre le système $\begin{cases}y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{10}{3}\\y=-\dfrac{2}{9}x-\dfrac{5}{9}\end{cases}$.

Dans les deux cas, on obtient $x=-\dfrac{5}{2}$ et $y=0$. [A FAIRE]

Donc les coordonnées de K sont $(-2{,}5\,;0)$.

4. a) Coordonnées de M, milieu de [DC] : $x_M=\dfrac{x_D+x_C}{2}=\dfrac{-16+2}{2}=-7$ et $y_M=\dfrac{y_D+y_C}{2}=\dfrac{-6+3}{2}=-\dfrac{3}{2}$.

Coeff. directeur de (LK) : $\dfrac{y_K-y_L}{x_K-x_L}=\ldots=\dfrac{1}{3}$.

Coeff. directeur de (LM) : $\dfrac{y_M-y_L}{x_M-x_L}=\ldots=\dfrac{1}{3}$.

Donc (LK) // (LM) et donc les points L, K et M sont alignés.

b) $KM=\sqrt{(x_M-x_K)^2+(y_M-y_K)^2}=\sqrt{(-7+2{,}5)^2+(-1{,}5-0)^2}=\ldots=\sqrt{22{,}5}$

$KL=\sqrt{(x_L-x_K)^2+(y_L-y_K)^2}=\sqrt{(2+2{,}5)^2+(1{,}5-0)^2}=\ldots=\sqrt{22{,}5}$

On en déduit donc que K est le milieu du segment [ML].

Exercice 4 [........... / 7 *(1,5 + 1 + 1,5 + 1,5 + 1 + 0,5)*] *env. 20 min*

1.

Nombre de jetons de couleur rouge	[0;100[	[100;200[	[200;300[	[300;400[	[400;500]	Total
Effectifs *(nombre de cartons)*	542	1 254	2 351	963	890	6 000
ECC*	542	1 796	4 147	5 110	6 000	-
Fréquences	0,09	0,21	0,39	0,16	0,15	1
FCC**	0,09	0,30	0,69	0,85	1	-

2. Caractère étudié : nombre de jetons de couleur rouge dans un carton de 500 jetons.
Type : quantitatif continu.

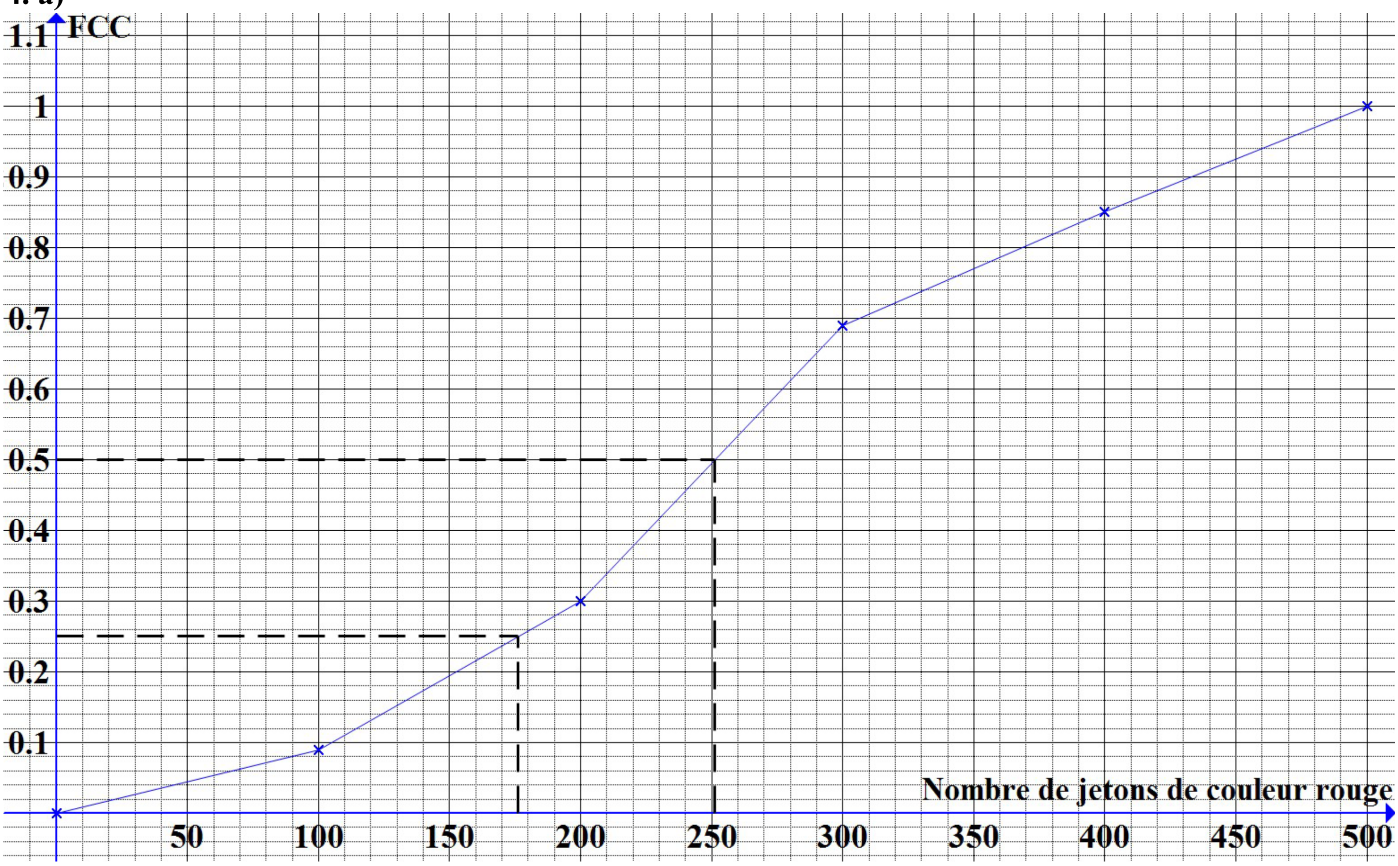
3. Moyenne : $\dfrac{542\times\frac{0+100}{2}+1254\times\frac{100+200}{2}+2351\times\frac{200+300}{2}+963\times\frac{300+400}{2}+890\times\frac{400+500}{2}}{6000}$

$= \dfrac{542\times 50+1254\times 150+2351\times 250+963\times 350+890\times 450}{6000}$

$= \dfrac{1\,540\,500}{6000} = 256{,}75.$

En moyenne, un carton de 500 jetons contient 256,75 jetons de couleur rouge.

4. a)



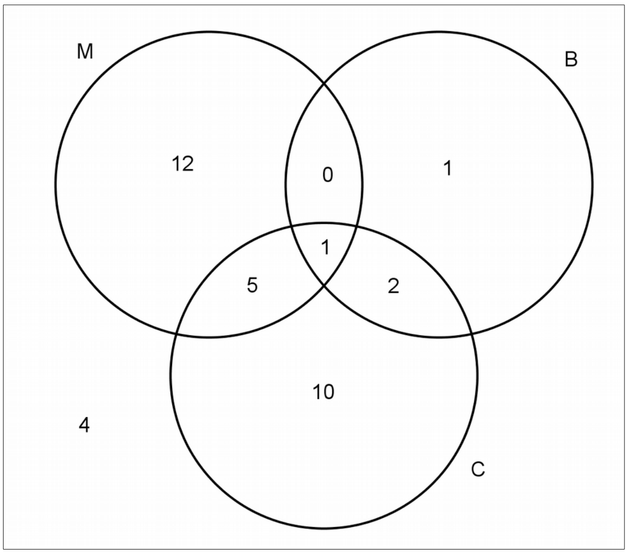
b) On lit graphiquement :
- la médiane : environ 251 ;
- le premier quartile : environ 176.

c) Au moins 25 % des cartons de 500 jetons contiennent moins de 176 jetons de couleur rouge.

Exercice 5 […… / 5 *(2,5 + 0,5 + (1 + 1))*] *env. 10 min*

1.

$3-1=2$
$1-1=0$
$6-1=5$
$18-5-1-2=10$
$18-5-1-0=12$
$35-12-1-10-0-5-2-1=4$



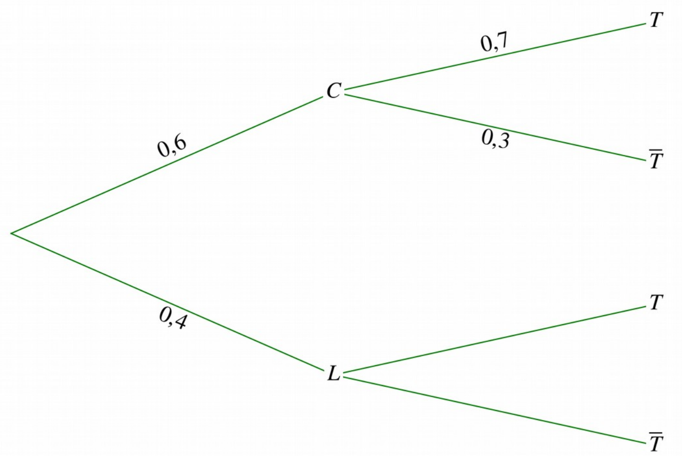
2. Nombre de personnes qui écoutent Ben Howard : 4.

3. a) Probabilité que l'élève écoute Christophe Maé ou JuL : $\dfrac{10+2+5+1+0+12}{35}=\dfrac{30}{35}=\dfrac{6}{7}$.

b) $\overline{B}\cap\overline{C}$: « la personne n'écoute pas Ben Howard et n'écoute pas Christophe Maé ».
$p(\overline{B}\cap\overline{C})=\dfrac{12+4}{35}=\dfrac{16}{35}$.

Exercice 6 […… / 4,5 *(1,5 + 1 + (1 + 1))*] *env. 10 min*

1.



2. $p(C\cap\overline{T})=0{,}6\times0{,}3=0{,}18$

3. a) $p(T)=0{,}8$ donc $p(T\cap L)+p(T\cap C)=0{,}8$
ie $p(T\cap L)+0{,}6\times0{,}7=0{,}8$
donc $p(T\cap L)=0{,}8-0{,}42=0{,}38$.

b) On note x la probabilité que le jeune choisi possède un téléphone portable sachant que c'est un lycéen. Alors : $0{,}4\times x=p(T\cap L)$
d'où $x=\dfrac{0{,}38}{0{,}4}=\dfrac{19}{20}=0{,}95$.