SUITES : LIMITES

« *Le plus grand service qu'on puisse rendre à un auteur est de lui interdire de travailler pendant un certain temps.*
Des tyrannies de courte durée seraient nécessaires, qui s'emploieraient à suspendre toute activité intellectuelle.
La liberté d'expression sans interruption aucune expose les talents à un péril mortel, elle les oblige à se dépenser au-delà de leurs ressources et les empêche de stocker des sensations et des expériences.
La liberté sans limites est un attentat contre l'esprit. »

Emil CIORAN / De l'inconvénient d'être né (1973)

« ***Croire au village, c'est donner une limite à sa vie*** *; c'est lui croire un sens, et elle n'en a pas. C'est un peu sot de s'imaginer que nous avons une raison d'être là plutôt qu'ailleurs. Continuer nos pères, pour quoi faire? Ils ne savaient pas. La feuille a une attache qui lui suffit. Le cerveau est nomade. Pas de petite patrie. Une fuite résignée. Être n'importe où, ne jamais consentir à se fixer comme si un point dans l'univers nous était réservé. N'ayons pas d'orgueil ! Au premier éclair de lucidité nous verrions que nous sommes dupes, et nous serions pleins de pitié pour nous mêmes.*
Livrons-nous à l'universelle loi d'éparpillement.
Ne pas être un homme qui regarde son village avec une loupe.
Rappelons-nous que ce monde n'a aucun sens. »

Jules RENARD / Journal / < 3 novembre 1906 p.854 >

Rappel : notion de limite d'une suite à partir d'exemples (pas de définition formelle) vue en 1ère S.
Donc une approche **intuitive** en 1ère S.

I. Limite d'une suite

I.1 Limite finie (convergence) et divergence

DÉFINITION.
Une suite (u_n) admet pour limite le réel l si

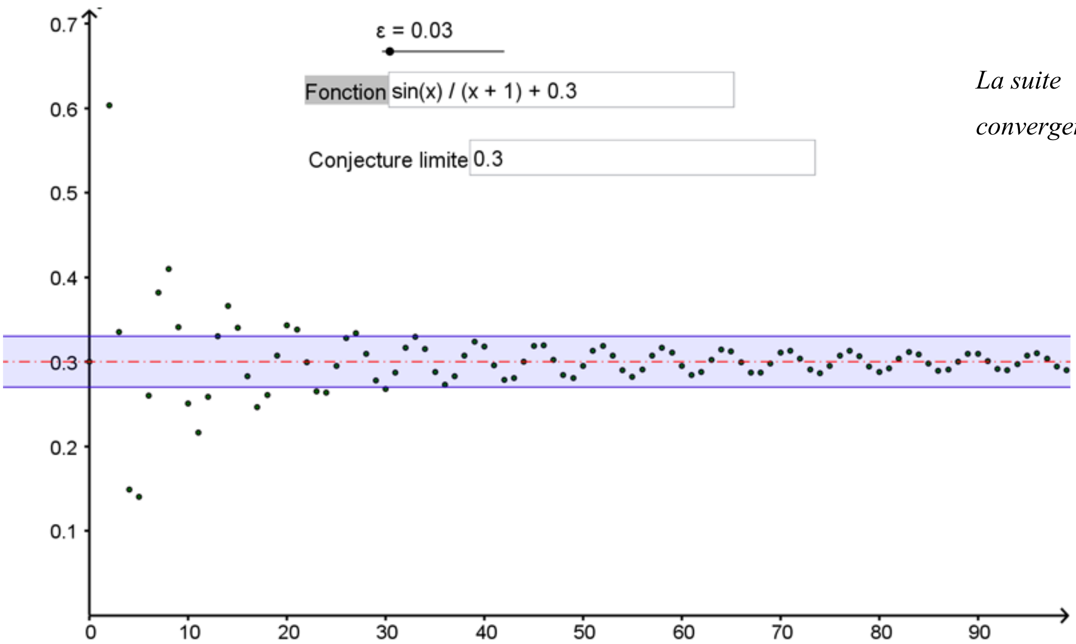
On dit alors que (u_n) est ***convergente*** et converge vers l .

Notation :

Si aucune confusion possible, on note aussi :

Remarque : un intervalle ouvert contenant l est de la forme

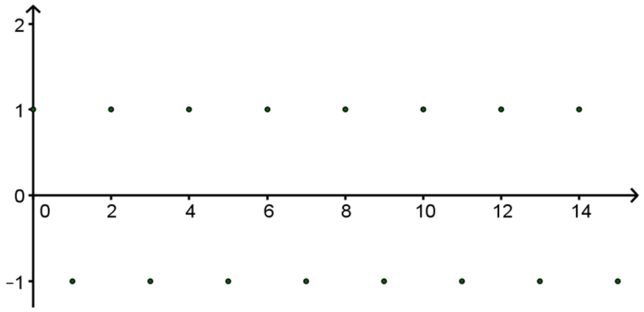
Une définition plus formelle (hors programme) est donc : $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$.



La suite $\left(\frac{\sin(n)}{n+1} + 0{,}3\right)$ *semble converger vers 0,3.*

Exemple : démontrer que la suite des inverses $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers ....

DÉFINITION. Une suite qui n'est pas convergente est dite ***divergente***.



La suite définie par $u_n = (-1)^n$ *est divergente : elle n'admet pas de limite.*

Admise

PROPRIÉTÉ. Une suite convergente admet une limite unique.

Démonstration accessible en Terminale S : voir exercice 80 page 59, ou la chercher (pas très difficile)

Hors programme, mais évidente !

PROPRIÉTÉS. *i)* Une suite convergente est bornée.
ii) Une suite non bornée est divergente.

Remarque : le *ii)* est la contraposée du *i)*.

Démonstration accessible en Terminale S. A chercher.

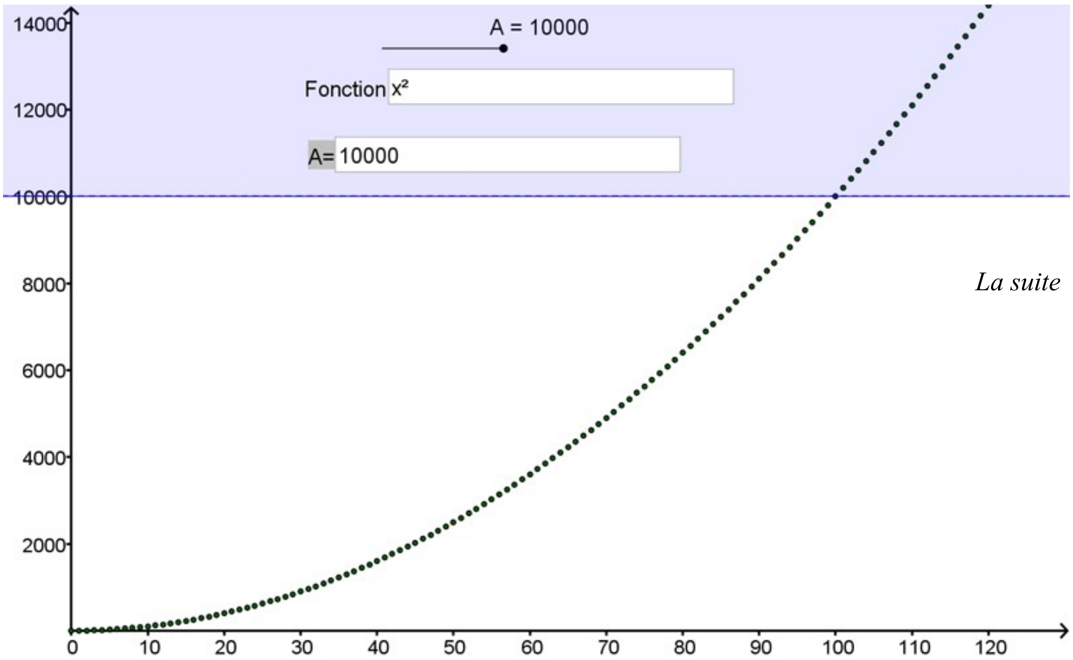
/!\ *Attention* /!\

Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.
Contre-exemple : $\left((-1)^n\right)$.

I.2 Limite infinie

> DÉFINITION. Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si
>
> Notation :

Une définition plus formelle (hors programme) est donc : $\forall\, A>0$, $\exists\, N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n > A$.



La suite (n^2) semble tendre vers $+\infty$.

On pose alors facilement :

> DÉFINITION. Une suite (u_n) tend vers $-\infty$ si $(-u_n)$ tend vers $+\infty$.
> Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Définition équivalente : une suite (u_n) tend vers $-\infty$ si **tout** intervalle du type $]-\infty\,;A[$ contient **tous** les termes de la suite à partir d'un certain rang.

I.3 Alors c'est quoi la divergence ?

Par définition, une suite qui tend vers l'infini ne converge pas. Autrement dit elle diverge…
On dit donc par exemple qu'une suite ***diverge vers*** $+\infty$ *.*
Mais alors « une suite divergente tend nécessairement vers l'infini » ? Pas du tout !

Si une suite diverge, alors : - soit

- soit

> *« Les lois et les censures compromettent la liberté de pensée bien moins que ne le fait la peur. Toute* ***divergence*** *d'opinion devient suspecte et seuls quelques très rares esprits ne se forcent pas à penser et juger "comme il faut". »*
>
> *André Gide (1869-1951)*

II. Opérations sur les limites

II.1 Limite d'une somme

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$						

Admis

II.2 Limite d'un produit

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$						

Admis

II.3 Limite d'un quotient

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L'\neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 et $v_n>0$	0 et $v_n<0$	0 et $v_n>0$	0 et $v_n<0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$								

Admis

Il y a quatre cas d'indétermination, qui sont, en utilisant un abus d'écriture :

Pour lever une indétermination, le principe est de transformer l'écriture de l'expression étudier pour se ramener aux théorèmes généraux.

Exemple : déterminer la limite de la suite de terme général n^2-4n+1 .

III. Limites et comparaison

III.1 Théorèmes de comparaison (à l'infini)

III.1.1 A l'infini

ROC

THÉORÈMES. Supposons $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

i) Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors

ii) Si $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors

Démonstration :

III.1.2 De suites convergentes

Hors programme

PROPRIÉTÉ. Supposons $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
Si (u_n) et (v_n) convergent vers des limites notées l et l' alors : $l \leqslant l'$.

Remarque : si $u_n < v_n$ alors on n'a pas $l < l'$ mais toujours $l \leqslant l'$.
Trouver un contre-exemple de la proposition (fausse) « Si $u_n < v_n$ alors $l < l'$ ».

Démonstration *(possible par l'absurde, pas difficile)* :

III.2 Théorème des gendarmes

Admis

THÉORÈME. Supposons $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers un même réel l alors ....

Démonstration accessible en Terminale S. A chercher.

Exemple : démontrer que $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0.

IV. Limite d'une suite monotone

IV.1 Croissance/convergence et majoration

Au programme

PROPRIÉTÉ.
Si une suite (u_n) est croissante et converge vers l, alors elle est majorée par l : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant l$.

Remarque : de même si (u_n) est décroissante et converge vers l, alors (u_n) est minorée par l

Démonstration à faire :

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers un réel noté *l*.

1. Supposons qu'il existe un terme u_N de la suite (u_n) strictement supérieur à *l*.

a) Démontrer que l'intervalle $]l-1\,;u_\mathrm{N}[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_0.

b) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$: $u_n \notin\ ]l-1\,;u_\mathrm{N}[$.

2. Quel théorème peut-on déduire de la question 1. ?

IV.2 Théorème de la convergence monotone

THÉORÈMES. *i)* Une suite croissante et majorée .... *Admis*
ii) Une suite décroissante et minorée ....

Remarque : ce théorème capital affirme la convergence de suites, ***mais n'apporte aucune information sur la valeur de cette limite****. Il est cependant très utilisé pour démontrer assez facilement une convergence.*

Démonstration *accessible en Terminale S :*

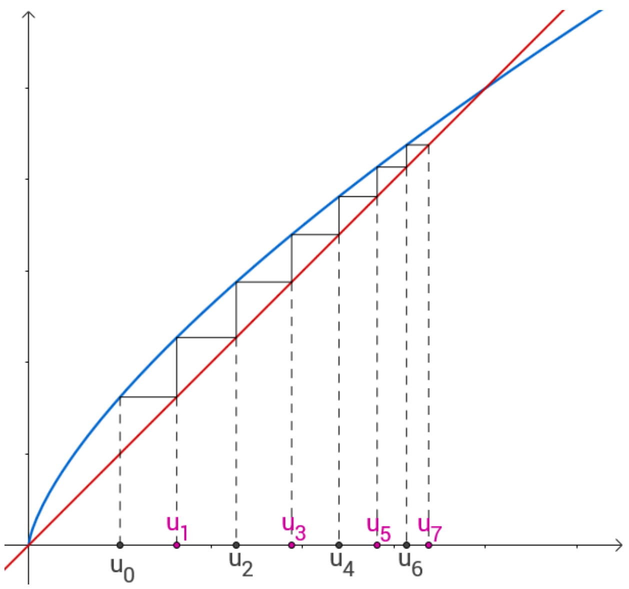
l'idée est d'utiliser le théorème « toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie », avec l'ensemble $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$. On la note l.
Alors $l-\epsilon$ n'est pas un majorant de (u_n). Donc il existe n_0 tel que $u_{n_0}\geqslant l-\epsilon$.
Or (u_n) est croissante donc si $n\geqslant n_0$ alors $u_n\geqslant u_{n_0}$.
On a donc : $l+\epsilon\geqslant l\geqslant u_n\geqslant u_{n_0}\geqslant l-\epsilon$. D'où (u_n) converge vers l.

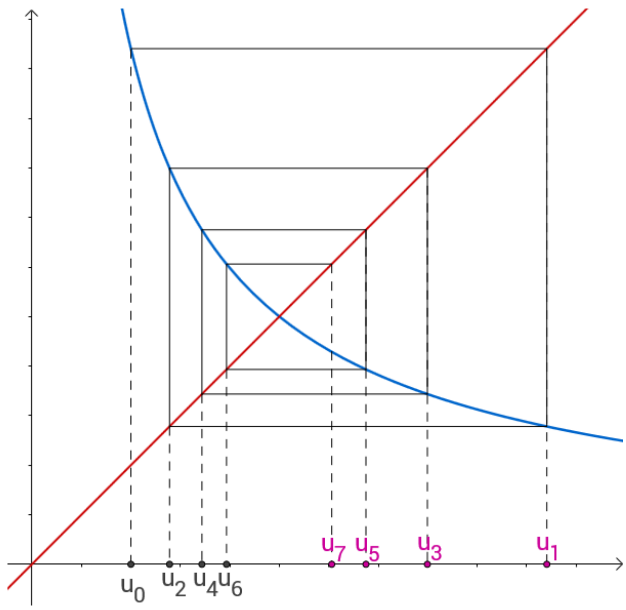
THÉORÈME DU POINT FIXE. ***Hors programme***

Si f : I $\rightarrow$ I est continue[1] et si (u_n) : $\begin{cases} u_0\in \mathrm{I} \\ \forall\, n\in\mathbb{N},\, u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ converge vers un réel l avec $l\in$I,

alors l est un point fixe de f : $f(l)=l$.

Remarque : ce théorème est capital car **il apporte une information sur la valeur de la limite**..
Soit on sait que la suite converge et il ne nous reste plus qu'à résoudre $f(x)=x$, soit on ne sait pas si la suite converge et dans ce cas on suppose qu'elle converge et on a une information sur l'éventuelle limite : elle vérifie $f(l)=l$.





1 Nous verrons cette notion plus tard. Pour faire simple, une fonction « continue » est souvent une fonction qui peut se tracer « sans lever le crayon »… Autrement dit la plupart des fonctions étudiées au lycée.

IV.3 Suites monotones non bornées

Au programme

PROPRIÉTÉS. Une suite croissante et non majorée ....
Une suite décroissante et non minorée ....

Démonstrations :

V. Limites de la suite géométrique (q^n)

PROPRIÉTÉS.

ROC si $q>1$

q	$q \leqslant -1$	$-1<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$				

Démonstration *dans le cas* $q>1$:

Exemple : **1.** Étudier la convergence des suites définies par :

a) $u_n=\dfrac{2}{3^n}$ **b)** $v_n=-3\left(\sqrt{2}\right)^n$ **c)** $w_n=\dfrac{(-3)^n}{5}$.

2. Déterminer la limite de la suite définie par $u_n=2^n-3^n$ pour tout entier n .