II.2 Démonstration du français Nicole Oresme (vers 1320 – 1382, mort vers 62 ans)

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n+2}}$

$$v_{n+1} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}} + \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}+1} + \frac{1}{2^{n+1}+2} + \dots + \frac{1}{2^{n+2}}}$$

$$v_{n+1} = v_n + A_{n+1}$$

(en effet : $2^{n+2} = 2^{n+1} + 2^{n+1}$ car $2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}$)

b) On note $P(n)$: « $v_n = 1 + A_0 + A_1 + \dots + A_n$ ».

• Initialisation : $n = 0$

$v_0 = u_{2^0+1} = u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

et $1 + A_0 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

donc $P(0)$ est vraie.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie.

Alors : $v_{n+1} = v_n + A_{n+1}$

$= (1 + A_0 + A_1 + \dots + A_n) + A_{n+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= 1 + A_0 + A_1 + \dots + A_{n+1}$.

donc $P(n+1)$ est vraie.

• Conclusion : d'après le raisonnement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 + A_0 + A_1 + \dots + A_n.$$

2) a) A_n est la somme de 2^n termes.

b) $A_n = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n}$

donc $A_n \geq \frac{1}{2^n+2^n} + \frac{1}{2^n+2^n} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n}$

i.e. $A_n \geq 2^n \times \frac{1}{2^n+2^n}$ i.e. $A_n \geq \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \times 2}$

i.e. $A_n \geq \frac{1}{2}$.

3) a) $v_n = 1 + A_0 + A_1 + \dots + A_n$

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $A_i \geqslant \frac{1}{2}$

donc : $v_n \geqslant 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n+1 \text{ fois}}$

ie $v_n \geqslant 1 + \frac{n+1}{2}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{n+1}{2} = +\infty$, et $v_n \geqslant 1 + \frac{n+1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. (théorème de comparaison)

4) a) On note $S(n) = 2^{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$S(n+1) - S(n) = 2^{n+2} - 2^{n+1} = 2^{n+1}(2-1) = 2^{n+1}$

donc $S(n+1) - S(n) > 0$

donc $S(n+1) > S(n)$: S est strictement croissante.

On a donc $V_n = u_{S(n)}$ avec S strictement croissante

donc (v_n) est une suite extraite de (u_n).

b) * Supposons que (u_n) converge vers un réel noté ℓ.

Alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ (théorème admis)

donc (v_n) converge vers ℓ.

Or (v_n) tend vers $+\infty$ ...

On en déduit que (u_n) ne converge pas.

* (u_n) est donc une suite croissante (qu° I.1))

qui ne converge pas.

D'après la qu° I.2), (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$