I. Une suite strictement croissante et un théorème

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$ d'où $u_{n+1} > u_n$: (u_n) est strictement croissante.

2) Soit (u_n) une suite croissante qui ne converge pas.

"Une suite croissante majorée converge" donc "Si une suite est croissante, si elle est majorée alors elle converge".

La contraposée donne "Si une suite est croissante, si elle ne converge pas, alors elle n'est pas majorée"

donc (u_n) n'est pas majorée.

Or " une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$"

donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

II. Une suite divergente en l'infini

II.1 Démonstration « par extraction absurde »

1)a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_{2n} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

ie $u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$.

Or, chacun de ces termes est supérieur à $\frac{1}{2n}$

(car $n+1 < n+2 < \dots < 2n-1 < 2n$

donc $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \dots > \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$)

donc : $u_{2n} - u_n \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}}_{2n-(n+1)+1 \text{ termes, ie } n \text{ termes}}$.

d'où $u_{2n} - u_n \geqslant n \times \frac{1}{2n}$ ie $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Autre méthode : par récurrence sur n.

Voici l'idée pour l'hérédité.

$$u_{2(n+1)} - u_{n+1} = u_{2n+2} - u_{n+1} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k}$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$ (hypothèse de récurrence)

et : $\displaystyle -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$

$$= \frac{-2(2n+1) + 2(n+1) + 2n+1}{2(n+1)(2n+1)}$$

(développer) $\displaystyle = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$

donc $u_{2(n+1)} - u_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$. (CQFD)

b) Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers l.

Alors, comme $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$, on a*:

$$l - l \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{ie} \quad 0 \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{(ce qui est faux)}$$

Conclusion : (u_n) ne converge pas.

* (u_n) converge vers l, donc la suite extraite (u_{2n}) également.

2) (u_n) est croissante et ne converge pas,

donc d'après le I. : (u_n) diverge vers $+\infty$.