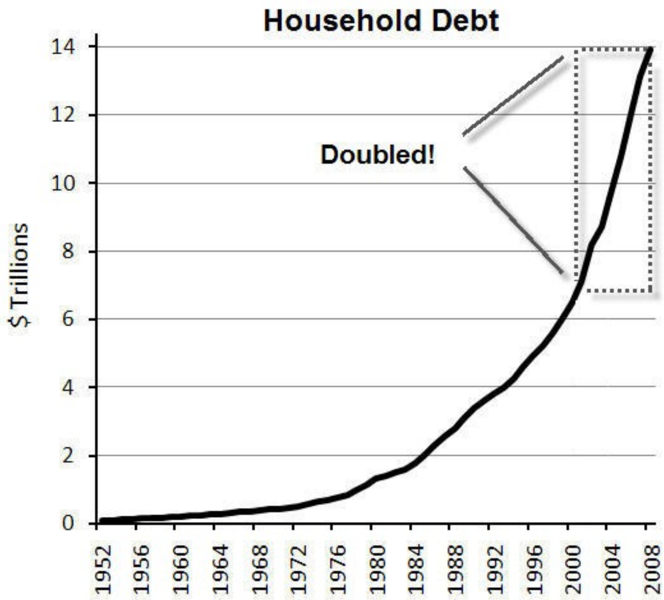
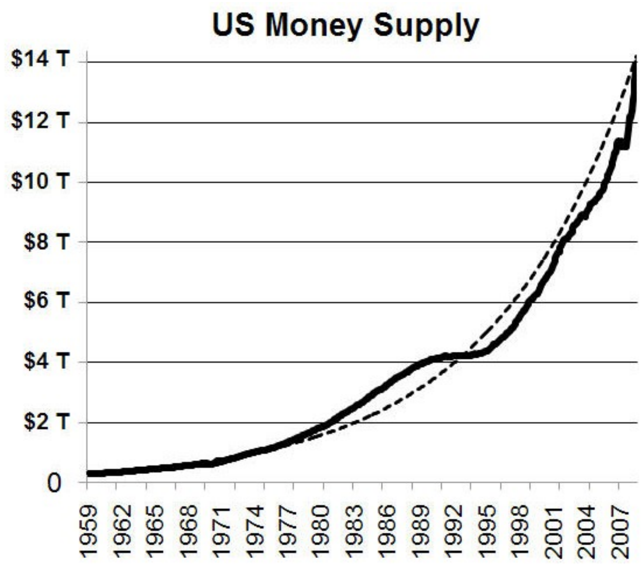
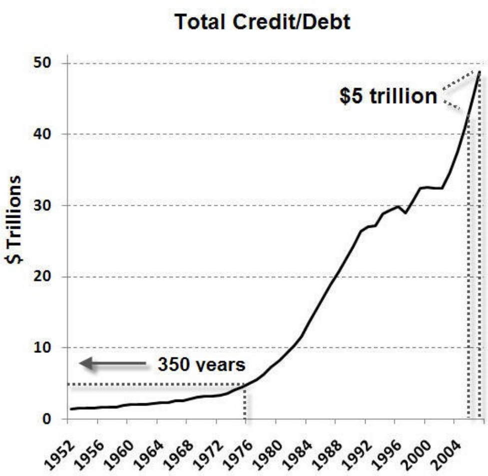
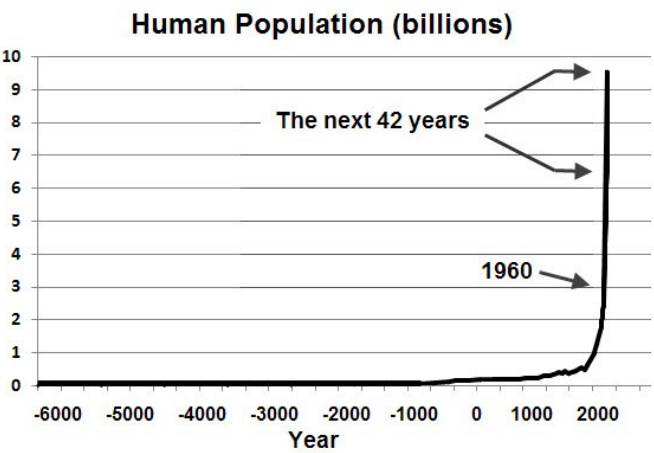
FONCTION EXPONENTIELLE









I. Définition

ROC

THÉORÈME. Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur ℝ telle que :
$$f'=f \text{ et } f(0)=1 .$$
Par ailleurs, cette fonction ne s'annule pas sur ℝ et vérifie : $f(x)f(-x)=1$.

Démonstration : *l'existence est admise[1] ; l'unicité est une R.O.C.*

On admet l'existence d'une fonction f dérivable sur ℝ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
Nous allons démontrer que cette fonction est unique.

On définit la fonction h par $h(x)=f(x)f(-x)$.

1. a) Démontrer que la fonction h est constante sur ℝ.

b) En déduire que, pour tout réel x : $f(x)f(-x)=1$.

c) En déduire que la fonction f ne s'annule pas sur ℝ.

2. Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur ℝ telles que $f'=f$, $g'=g$, $f(0)=g(0)=1$.

D'après la question 1., g ne s'annule pas sur ℝ. On définit alors la fonction k par : $k=\dfrac{f}{g}$.

a) Démontrer que pour tout $x\in$ ℝ : $k(x)=1$.

b) En déduire que $f=g$.

DÉFINITION. On note exp et on appelle fonction exponentielle cette unique fonction.

On a donc : $\exp(0)=1$ et pour tout réel x , $\exp'(x)=\exp(x)$.

II. Étude de la fonction exponentielle

II.1 Signe

PROPRIÉTÉ. La fonction exp est strictement positive sur ℝ.

Démonstration : *admise, mais facile lorsqu'on aura fait le chapitre Ana 6 (continuité).*
Utilise le théorème des valeurs intermédiaires. *Voir page 166.*

II.2 Sens de variation

PROPRIÉTÉ. La fonction exp est strictement croissante sur ℝ.

Démonstration : *évidente*

CONSÉQUENCES. Pour tous réels a et b :
- $a=b \Leftrightarrow \exp(a)=\exp(b)$
- $a<b \Leftrightarrow \exp(a)<\exp(b)$.

1 Cela découle du théorème de Cauchy-Lipschitz (difficile – au programme de l'Agrégation de mathématiques), qui dit que sous certaines conditions, une équation différentielle dont on connaît une valeur admet au moins une solution.
Voir par exemple : http://sandrine.toonywood.org/pageperso/agreg/cauchy-lipschitz.pdf

II.3 Limites en $+\infty$ et $-\infty$

ROC

PROPRIÉTÉS.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = \ldots$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = \ldots$

Démonstrations :

On définit la fonction f par $f(x) = \exp(x) - x$ pour tout réel x.

1. a) Démontrer que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

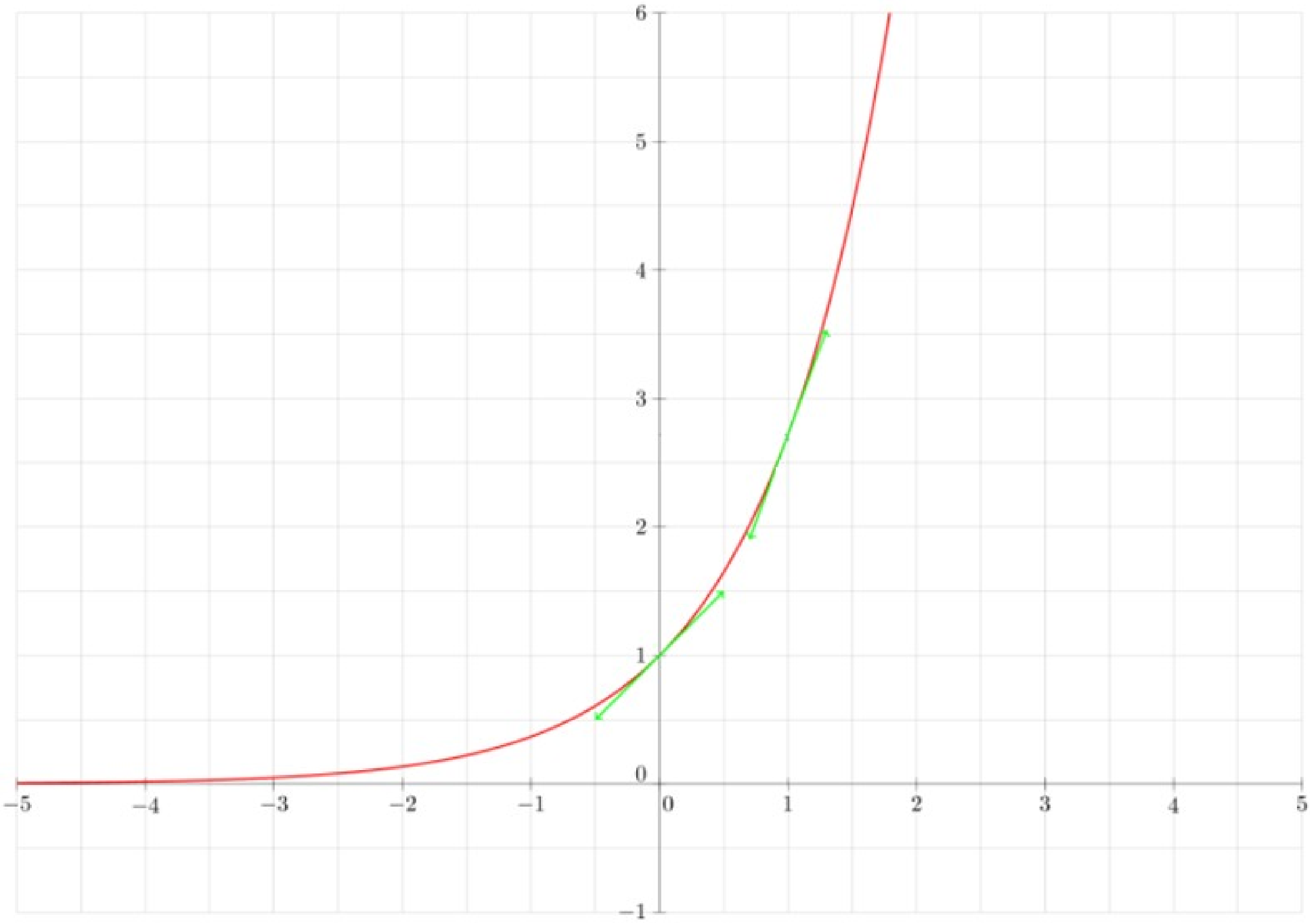
b) En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$: $\exp(x) \geqslant x$.

2. Que peut-on en déduire sur la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$? Justifier.

3. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$. En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

II.4 Courbe représentative

Tangente particulière : *une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction* exp *au point d'abscisse 0 est …*



III. Propriétés algébriques

III.1 Relation fonctionnelle

THÉORÈME. $\forall \ (x\,;y) \ \in \mathbb{R}^2, \ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Démonstration :

PROPRIÉTÉS. Pour tous réels x et y,

$\exp(-x) =$

$\exp(x-y) =$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(nx) =$

Démonstrations :

III.2 Notation puissance

On note e le nombre exp(1) : $e \approx 2{,}718$.
On l'appelle « nombre d'Euler » ou « constante de Néper » en référence aux mathématiciens Leonhard Euler (1707-1783) et John Napier (1550 – 1617).

On a donc : $\exp(n+m)=\exp(n)\exp(m)$, ce qui fait penser à $a^{n+m}=a^n a^m$.
On décide donc de noter :

$$\mathrm{e}^x=\exp(x)$$

BILAN :

IV. Limites particulières

IV.1 Approximation affine de exp en 0

PROPRIÉTÉ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\ldots$

Démonstration :

Remarque : on a donc $\mathrm{e}^x \approx 1+x$ si x est proche de 0.

IV.2 Croissances comparées

PROPRIÉTÉS. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = \ldots$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = \ldots$

Démonstrations :

Admis

THÉORÈMES. $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \ldots$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \ldots$

Démonstrations guidées : voir exercices 63 et 64 page 183