CONJECTURE DE COLLATZ [CORRECTION]

Le plus grand temps de vol est 178 atteint pour le nombre 871

Temps mis pour l'évaluation: 0.687

Autres résultats obtenus avec Xcas et Python :

Entiers testés	5000	10 000	20 000	30 000	50 000	100 000	200 000	500 000	1 000 000	10 000 000
Max temps de vol ...	237	261	278	307	323	350	382	448	524	685
... pour l'entier	3 711	6 171	17 647	26 623	35 655	77 031	156 159	410 011	837 799	8 400 511
Temps d'exécution approximatif Xcas (s)*	4	9	21	32	56	122	260	703 (≈ 12 min)	819** (≈ 14 min)	***
Idem pour Python (s)*	0,28	0,52	0,95	1,51	2,82	5,61	12,4	30	37**	732

** cela dépend bien sûr du PC utilisé.*
*** résultat obtenu en calculant « pour N de 500 000 jusque 1000000 ».*
**** Je me suis arrêté à 1 000 000. Je ne sais donc pas à partir de quand Xcas ne peut plus calculer par manque de mémoire…*
Pour Python, je me suis arrêté à 10 000 000.

Programme Xcas 1.2.0-9

```
temps_max:=0;
pour N de 1 jusque 1000 faire
      u:=N;
      temps_de_vol:=0;
      tantque u!=1 faire
             si u%2==0 alors
                    u:=u/2;
             sinon
                    u:=3*u+1;
             fsi;
             temps_de_vol:=temps_de_vol+1;
      ftantque;
      si temps_de_vol>temps_max alors
             temps_max:=temps_de_vol;
             Nmax:=N;
      fsi;
fpour;
afficher("Le plus grand temps de vol est "+temps_max+" atteint pour le nombre "+Nmax):;
```

Programme Python 3.6.0a3

```
temps_max=0
for N in range(1,1001):
  u=N
  temps_de_vol=0
  while u!=1 :
    if u%2==0 :
      u=u/2
    else:
      u=3*u+1
    temps_de_vol=temps_de_vol+1
  if temps_de_vol>temps_max :
    temps_max=temps_de_vol
    Nmax=N
print('Le plus grand temps de vol est atteint pour ',Nmax,' avec un temps de vol de ',temps_max)
```

Programme Algobox 0.9

```
VARIABLES
 N EST_DU_TYPE NOMBRE
 u EST_DU_TYPE NOMBRE
 temps_de_vol EST_DU_TYPE NOMBRE
 max EST_DU_TYPE NOMBRE
 N_max EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
 max PREND_LA_VALEUR 0
 POUR N ALLANT_DE 1 A 1000
  DEBUT_POUR
  u PREND_LA_VALEUR N
  temps_de_vol PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (u!=1) FAIRE
   DEBUT_TANT_QUE
   SI (u%2==0) ALORS
    DEBUT_SI
    u PREND_LA_VALEUR u/2
    FIN_SI
    SINON
     DEBUT_SINON
     u PREND_LA_VALEUR 3*u+1
     FIN_SINON
   temps_de_vol PREND_LA_VALEUR temps_de_vol+1
   FIN_TANT_QUE
  SI (temps_de_vol>max) ALORS
   DEBUT_SI
   max PREND_LA_VALEUR temps_de_vol
   N_max PREND_LA_VALEUR N
   FIN_SI
  FIN_POUR
 AFFICHER "Le plus grand temps de vol est atteint pour "
 AFFICHER N_max
 AFFICHER " avec un temps de vol de "
 AFFICHER max
FIN_ALGORITHME
```

Algobox m'indique un dépassement de mémoire autorisée à partir d'environ 49330 entiers testés.

Programme Casio *(non testé)*

```
0→T↵
For 1→N To 1000↵
N→U↵
0→V↵
While U≠1↵
If MOD(U,2)=0↵
Then U÷2→U↵
Else 3×U+1→U↵
IfEnd↵
V+1→V↵
WhileEnd↵
If V>T↵
Then V→T↵
N→Z↵
IfEnd↵
Next↵
Z◢
```

Programme Texas Instruments *(non testé)*

```
PROGRAM:TEMPSVOL
:0→T
:For(N,1,1000)
:N→U
:0→V
:While U≠1
:If int(U/2)=U/2
:Then
:U/2→U
:Else
:3*U+1→U
:End
:V+1→V
:End
:If V>T
:Then
:V→T
:N→Z
:End
:End
:Disp Z
```

C O M P L É M E N T S

L'énoncé de la conjecture de la suite de Syracuse est : quel que soit le premier terme choisi, en appliquant l'algorithme de Syracuse, nous finissons toujours par obtenir le nombre 1.

On obtient une suite de nombres qui est appelée :
- le **vol** du nombre de départ ;
- les nombres de la suite sont appelés les **étapes du vol** ;
- le plus grand nombre obtenu dans la suite est appelé l'**altitude** maximale du vol ;
- le nombre d'étapes avant d'obtenir 1 est appelé le **temps de vol** ;
- le nombre d'étapes avant de passer sous le nombre de départ est appelé **temps de vol en altitude**.

Exemple
La durée du vol pour 77 671 est de 231 et son altitude est de 1 570 824 736.
Ce nombre détient le ***record en altitude pour les nombres inférieurs à 100 000***.

Un record pour 2 361 235 441 021 745 907 775
La suite de Syracuse qui débute avec le nombre 2 361 235 441 021 745 907 775 a pour durée de vol 2 284, un record pour un nombre inférieur à 2^{72}.

Les altitudes des nombres obtenus au début de ce devoir :

Nombre	3 711	6 171	17 647	26 623	35 655	77 031	156 159	410 011	837 799	8 400 511
Temps de vol ...	237	261	278	307	323	350	382	448	524	685
Altitude	481 624	975 400	11 003 416	106 358 020	41 163 712	21 933 016	41 163 712	76 778 008	2 974 984 576	159 424 614 880

Source : http://calculis.net/syracuse

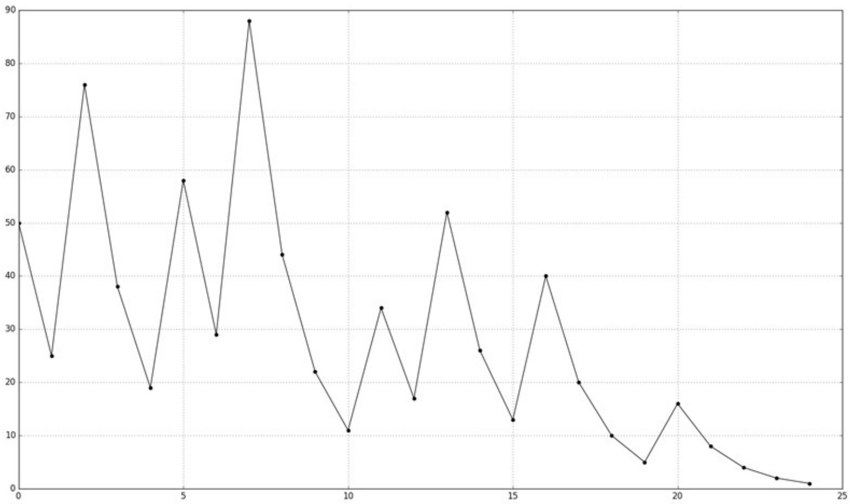
Records de durée en altitude

nombre	*durée en altitude*	*durée*	*altitude*
703	132	170	250 504
10 087	171	223	2 484 916
35 655	220	323	41 163 712
626 331	287	508	7 222 283 188
1 126 015	365	527	90 239 155 648
8 088 063	401	566	16 155 154 672
63 728 127	613	949	966 616 035 460
217 740 015	644	793	2 516 021 527 120
2 788 008 987	729	944	81 887 769 175 732
1 200 991 791	649	873	35 681 506 677 556
1 827 397 567	706	928	118 736 698 851 769 012
2 788 008 987	729	944	81 887 769 175 732
12 235 060 455	892	1184	1 037 298 361 093 936

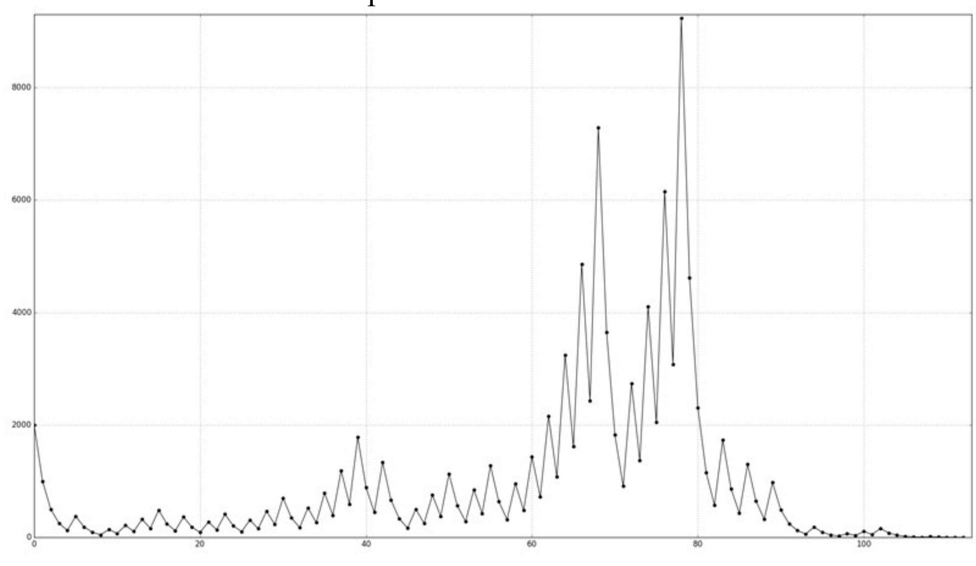
Source : https://www.les-suites.fr/suite-de-syracuse.htm

Représentations graphiques de cette suite

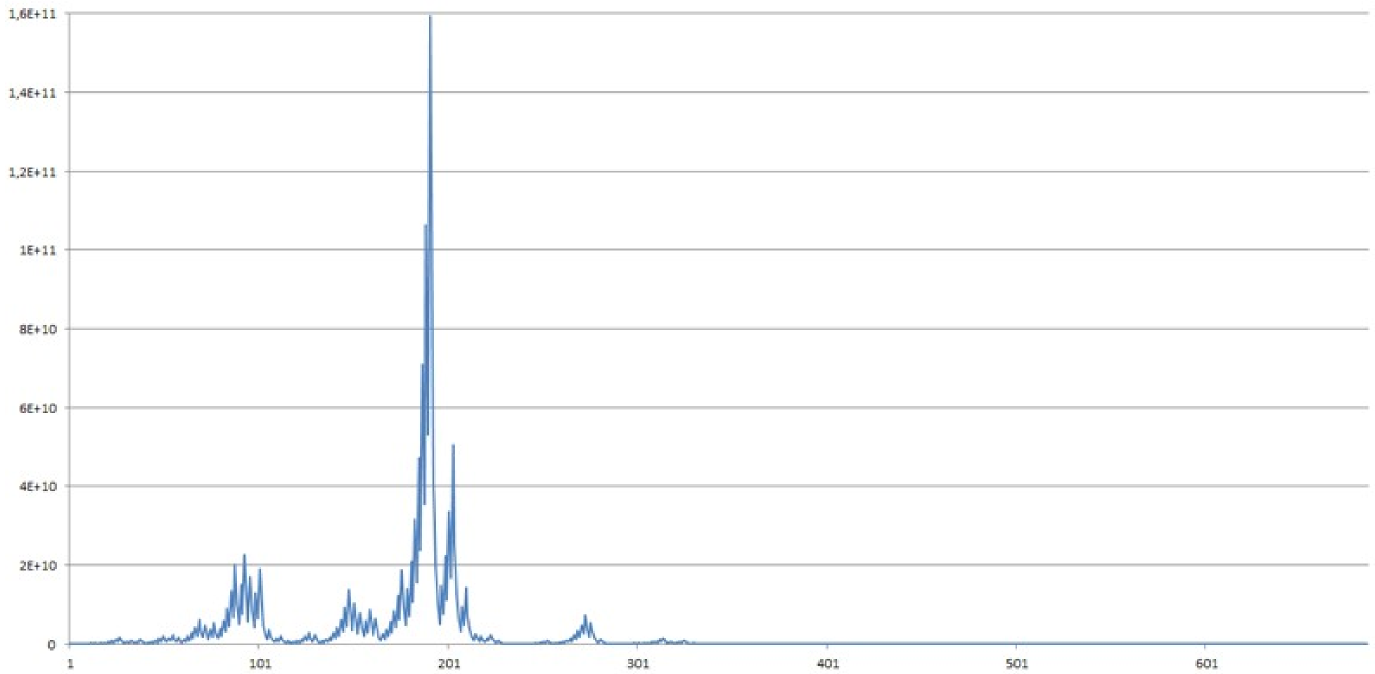
• La suite de Syracuse avec **N = 50** : temps de vol = 24 / altitude maximale = 88. *Fait en Python.*



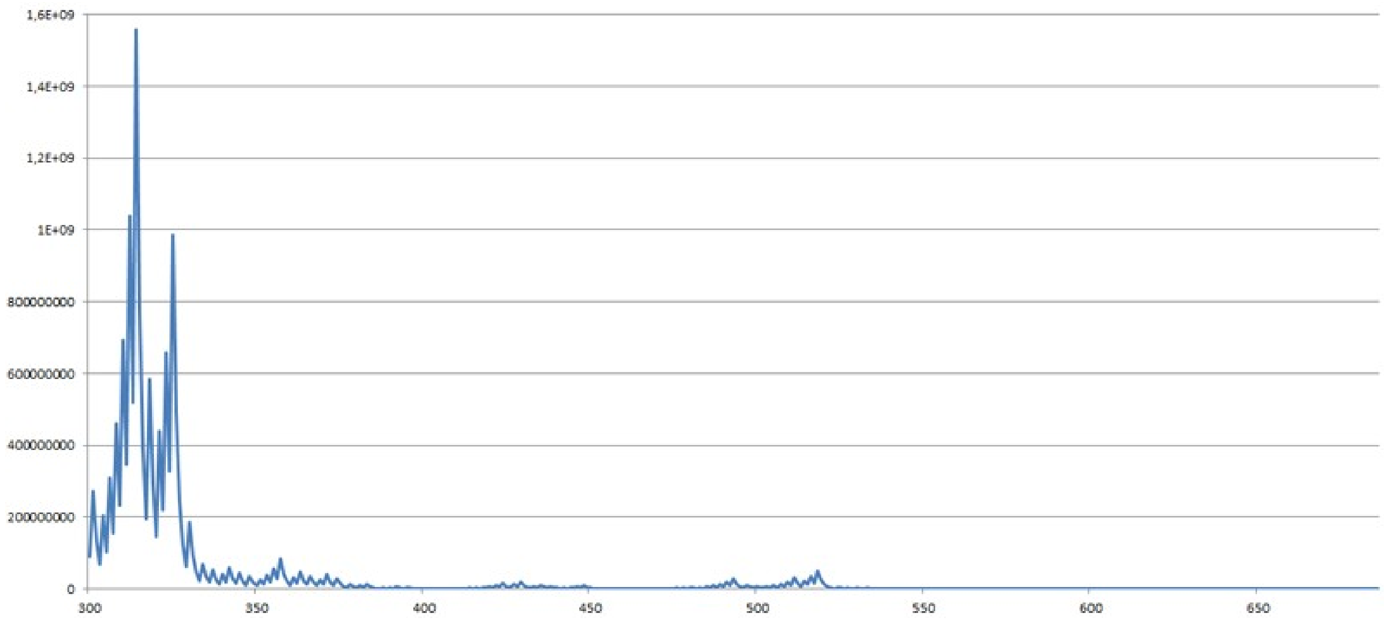
• La suite de Syracuse avec **N = 2 000** : temps de vol = 112 / altitude maximale = 9 232. *Fait en Python.*



Enfin, voilà une représentation graphique de la suite de vol 8 400 511. *Fait avec Algobox.*



Zoom à partir du 300ème terme :



Ce qui est magique avec cette conjecture est sa simplicité apparente, et pourtant elle résiste depuis des siècles aux plus grands mathématiciens du monde !

Certains avancent même que le problème serait indécidable[1].

Le mathématicien hongrois Paul Erdős (1913-1996) célèbre pour ses conjectures (voir conjecture de Erdos-Straus) a dit à propos de la conjecture de Syracuse :

« les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes »

<u>Ce qui est démontré à ce jour en 2016</u>

La conjecture de Syracuse est équivalente à l'un des énoncés suivants :

(1) la durée de tout vol est finie ;

(2) la durée de tout vol en altitude est finie ;

(3) tout vol a un nombre fini d'étapes paires ;

(4) tout vol a un nombre fini d'étapes paires en altitude ;

(5) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires ;

(6) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires en altitude.

<u>Des avancées ?</u>

Un site génial d'Olivier Rozier, ingénieur-chercheur à l'Institut de Physique du Globe de Paris :
http://www.probleme-syracuse.fr/math.html

« L'objet de cette page est de présenter une étude personnelle du problème de Syracuse. Après une introduction du problème dans sa forme classique, différents points de vue - heuristique, combinatoire, géométrique, musical - seront esquissés. Une étude basée sur une extension réelle et complexe sera développée, puis généralisée. Des diagrammes de bifurcation seront présentés. Enfin nous décrirons la dynamique asymptotique ainsi obtenue. »

1 La relative faiblesse des résultats obtenus en dépit de l'application acharnée de méthodes mathématiques puissantes par des esprits brillants a conduit certains chercheurs à se demander si la conjecture de Syracuse est un problème indécidable.
En 1972, John Conway a établi l'indécidabilité algorithmique pour une famille de problèmes qui généralise de manière naturelle le problème de Syracuse. Ce résultat implique qu'il y a dans la famille considérée des problèmes individuels qui sont indécidables, mais ne résout pas la décidabilité du problème de Syracuse en particulier.
Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse