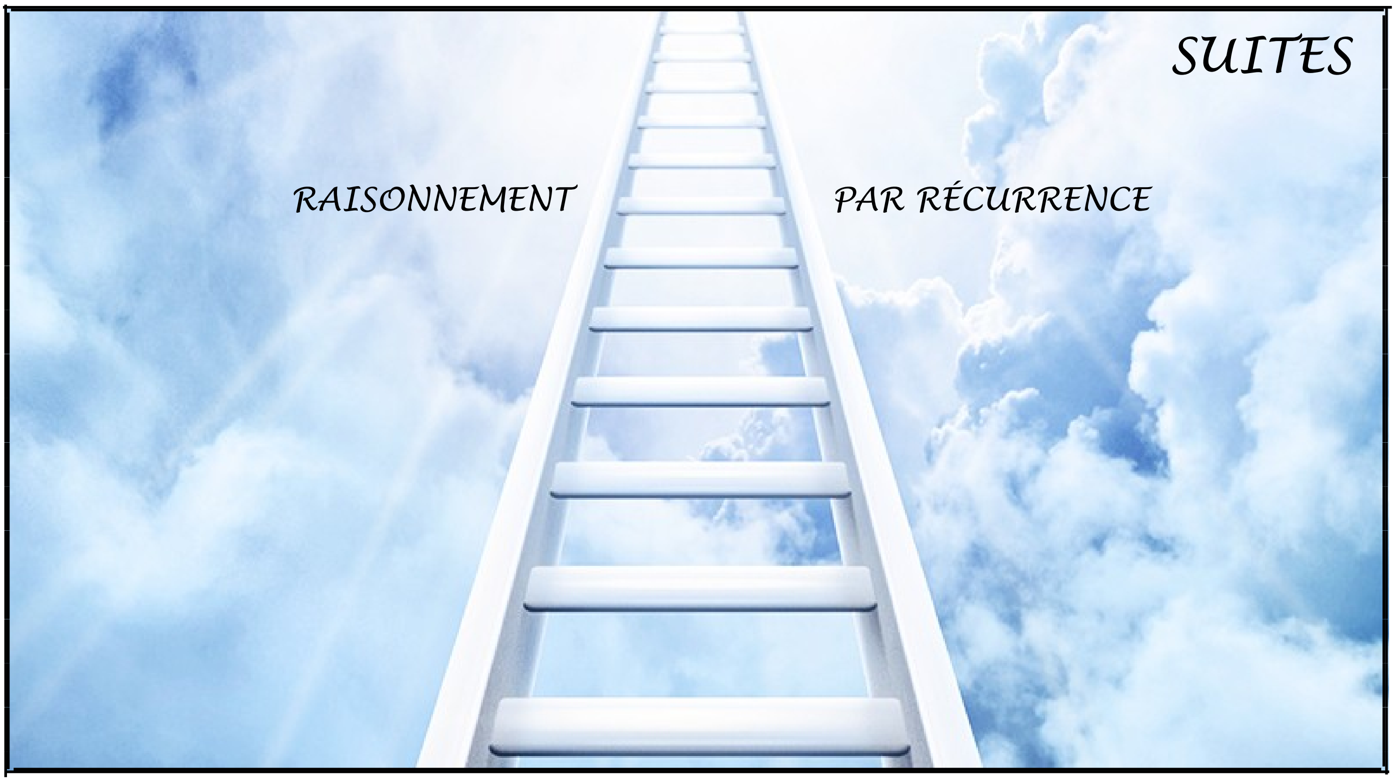
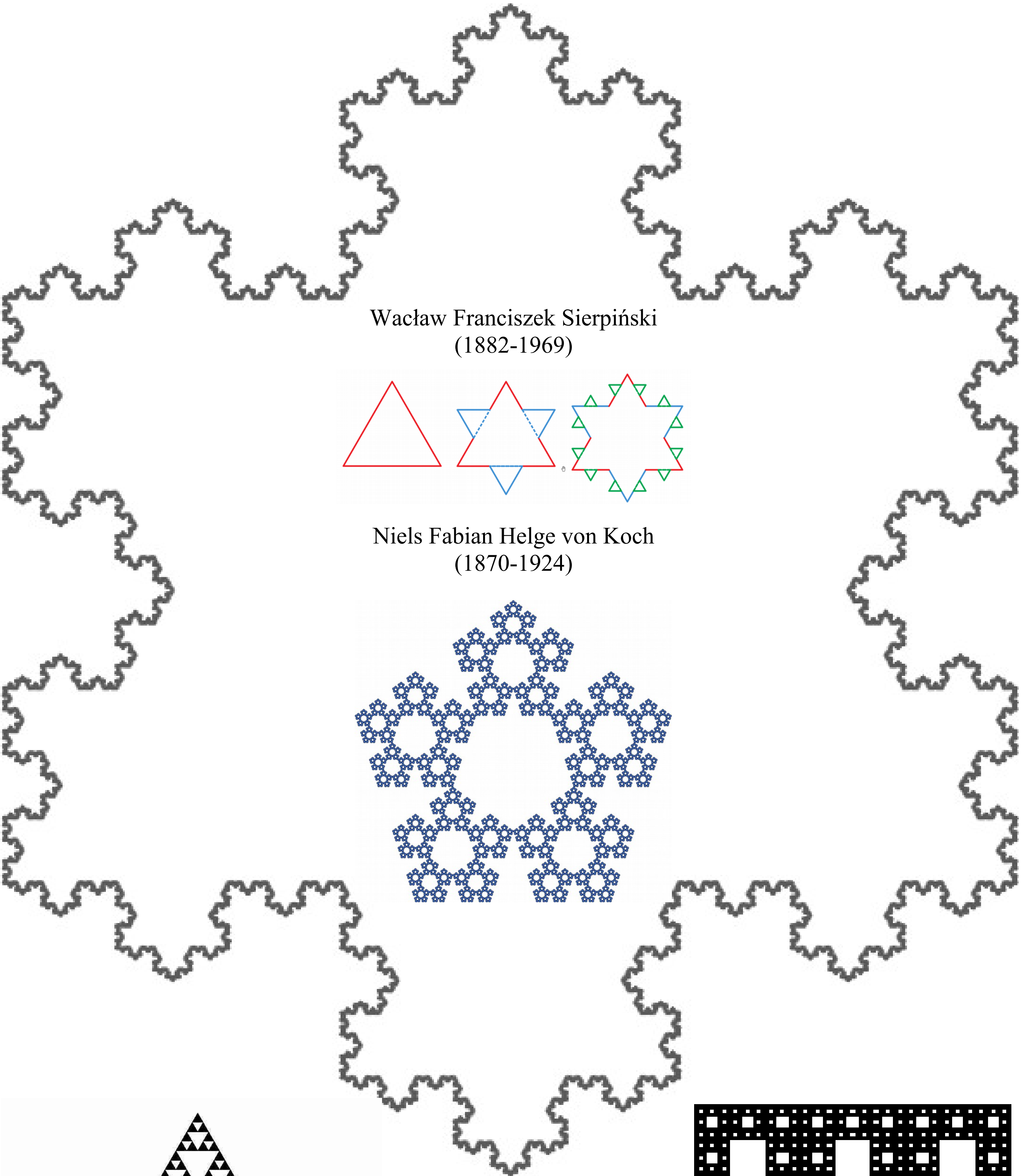


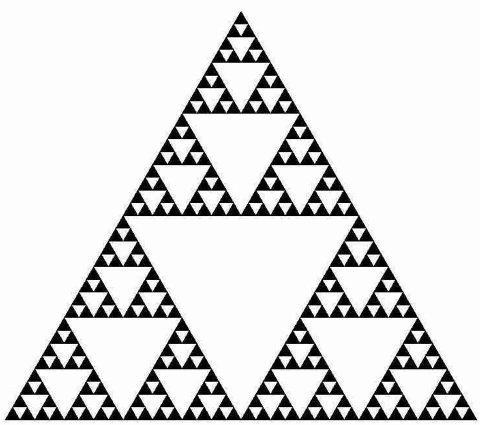
« Un voyage de mille lieues commence toujours par un premier pas. »
Lao Tseu, env. -600 av. J.-C.

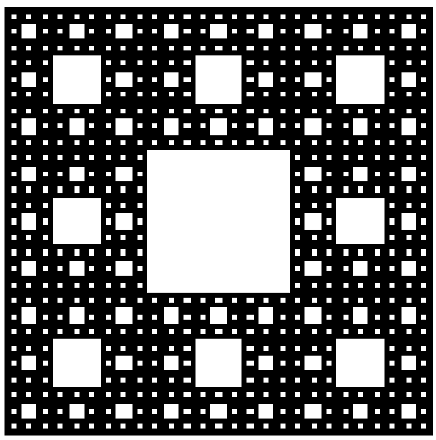
« Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie. »
Blaise Pascal (1623-1662)



Wacław Franciszek Sierpiński
(1882-1969)

Niels Fabian Helge von Koch
(1870-1924)





I. Généralités sur les suites (rappels de Première S)

I.1 Définition

DÉFINITION. Une ***suite*** numérique réelle est .... L'image de l'entier naturel n par une suite u est notée $u(n)$ ou u_n .
u_n est appelé .... de la suite ou terme d'indice n .

Attention aux notations : $u_n \neq (u_n)$ et $u_{n+1} \neq u_n+1$

Une suite peut être définie de différentes manières :

- .... , comme « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 1$ ».

Soit $p \in \mathbb{N}$ et f une fonction numérique définie sur $[p;+\infty[$.
« pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n = f(n)$ » définit la suite $(u_n)_{n \geqslant p}$.

- .... , comme $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = n^2+1 \end{cases}$.

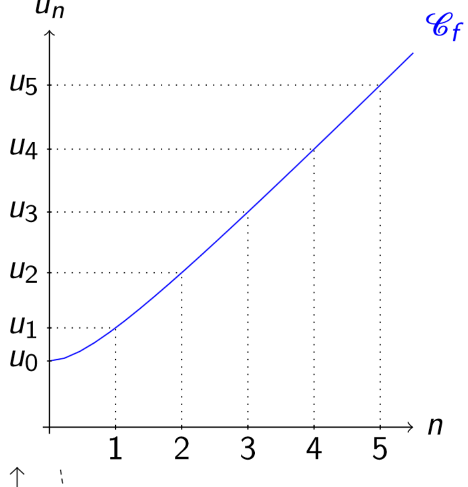
Soient $k \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ et f une fonction numérique définie sur $[p;+\infty[$.
« $\begin{cases} u_p = k \\ \text{pour tout entier } n \geqslant p,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ » définit la suite $(u_n)_{n \geqslant p}$.

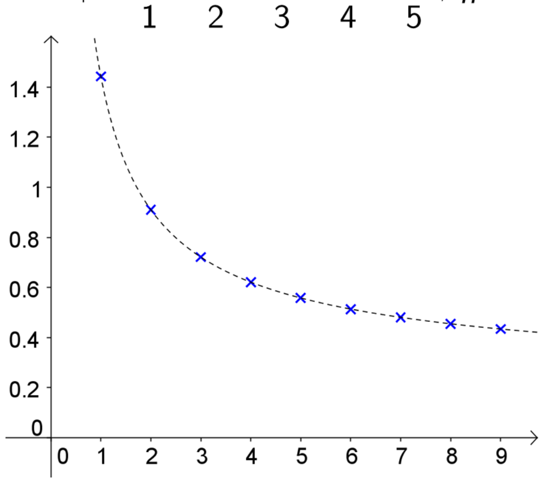
- .... : : $u_0 = 3$ et à tout entier naturel non nul n, on associe la $n^{\text{ème}}$ décimale de π.

I.2 Représentation graphique

Suite définie par une formule explicite

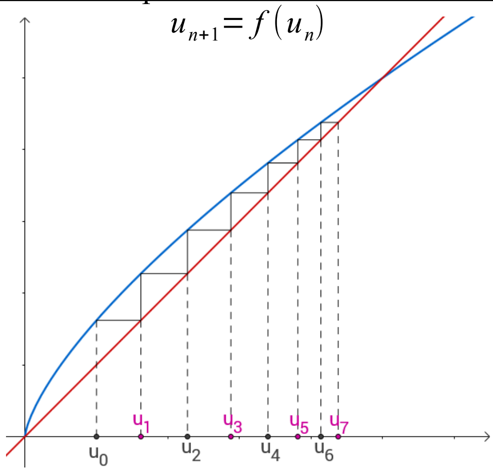
$u_n = f(n)$

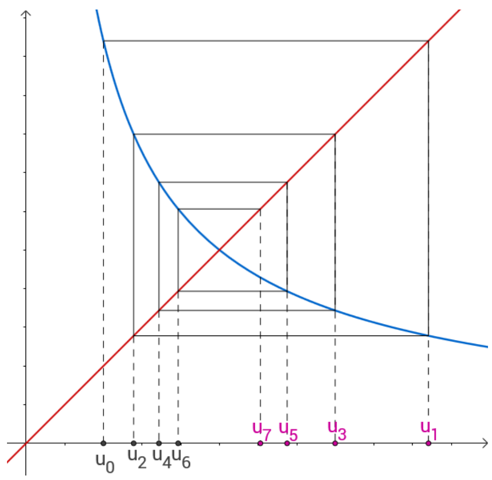




Suite définie par une relation de récurrence

$u_{n+1} = f(u_n)$





I.3 Suite majorée/minorée et sens de variation

DÉFINITIONS. Soient m et M deux réels.

(u_n) est ***majorée*** par M si ....

(u_n) est ***minorée*** par m si ....

(u_n) est ***bornée*** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques : - le majorant (le minorant) s'il existe n'est pas unique ;
- une suite croissante (décr.) est minorée (majorée) par son premier terme.

DÉFINITIONS.

(u_n) est ***croissante*** lorsque pour tout entier *n*, ...

(u_n) est ***strictement croissante*** lorsque pour tout entier *n*, ...

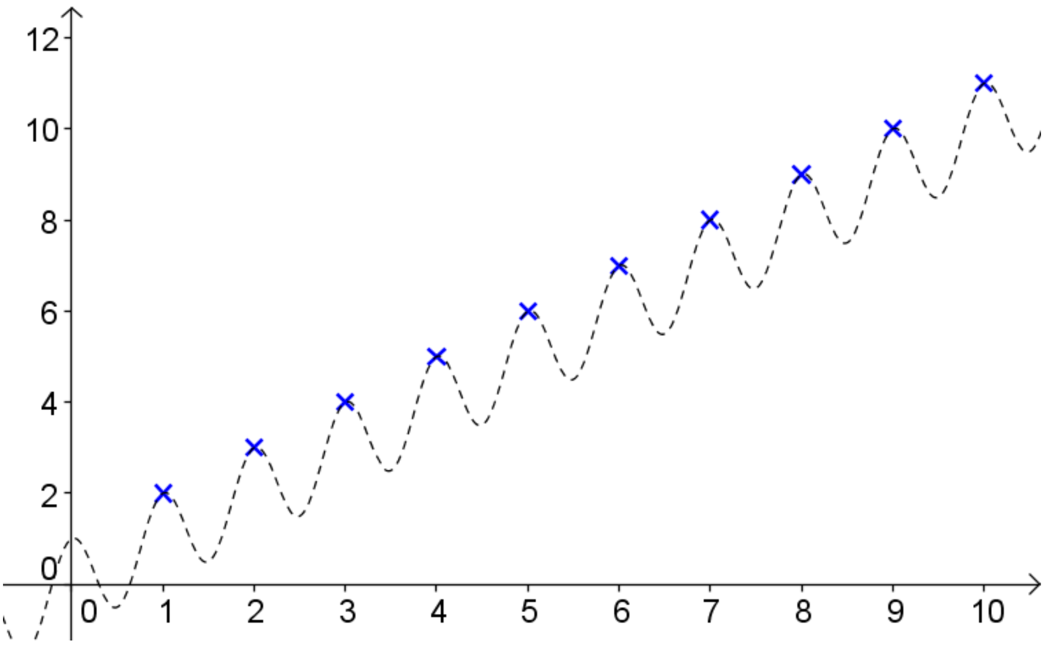
(u_n) est ***décroissante*** lorsque pour tout entier *n*, ...

(u_n) est ***strictement décroissante*** lorsque pour tout entier *n*, ...

(u_n) est ***constante*** lorsque pour tout entier *n*, ...

Méthodes pour étudier le sens de variations d'une suite (u_n) :
- Si la suite est de la forme $u_n=f(n)$, son sens de variations est celui de la fonction f^*.
- On étudie le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$
- Si $u_n>0$ (termes tous strictement positifs), on compare le quotient avec 1.

* la condition est suffisante, mais pas nécessaire, c'est-à-dire que la suite peut être croissante alors que la fonction ne l'est pas, par exemple : $f(x)=\cos(2\pi x)+x$ n'est pas croissante mais $u_n=\cos(2\pi n)+n=1+n$ est croissante !



/!\ *Attention* /!\ si (u_n) est définie par $u_{n+1}=f(u_n)$, la monotonie de f n'assure pas celle de (u_n).
(voir par exemple dessins du I.2)

I.4 Suites arithmétiques et géométriques

Suite arithmétique de raison r	
Définition	
Terme général	
Sens de variation	
Montrer qu'une suite est arithmétique	
Sommes de termes	

Suite géométrique de raison q	
Définition	
Terme général	
Sens de variation	
Montrer qu'une suite est géométrique	
Sommes de termes	

II. Raisonnement par récurrence

II.1 Du fini à l'infini

« Le raisonnement par récurrence est **un instrument qui permet de passer du fini à l'infini***. »*

Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902)

Si on sait monter sur le premier barreau d'une échelle
et si l'on sait toujours passer d'un barreau au barreau suivant,
alors on peut atteindre tous les barreaux de l'échelle.

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Soit $\mathrm{P}(n)$ une propriété relative à un entier naturel n .
Si : - $\mathrm{P}(0)$ est vraie (***initialisation***)
- pour tout entier naturel *n*, si $\mathrm{P}(n)$ est vraie alors $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie (***hérédité***)

alors $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Démonstration :admise, voir explications du professeur. Ce théorème est un axiome dans certaines théories.[1]

Exemple. Démontrons l'***inégalité de Bernoulli*** : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}_{+,}^{*} (1+a)^n \geqslant 1+na$.
On note P(*n*) : "   ".

Initialisation :

Hérédité :

Conclusion :

/!\ L'initialisation est importante. Une propriété peut être héréditaire sans pour autant être vraie.
Par exemple $\mathrm{P}(n)$: « 2^n est divisible par 3 ».

1 Dans l'axiomatique ordinale, on suppose : il existe un ensemble $\mathbb{N}$ non vide, muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ telle que tout partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, et tel que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré et tout partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément. A partir de ces axiomes on montre (par l'absurde) le théorème suivant, noté (THM REC) :
Soit $E \subset \mathbb{N}$. Si $0 \in E$ et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in E \Rightarrow n+1 \in E$ alors $E=\mathbb{N}$.
Et à partir de ce théorème, on montre rapidement un corollaire (le « raisonnement par récurrence » énoncé dans mon cours) en posant $\mathrm{E}=\{n \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(n) \text{vraie}\}$ et en l'appliquant au théorème THM REC.

II.3 Axiome ou théorème ?

A) Introduction

Beaucoup de livres présentent le raisonnement par récurrence comme un axiome ou un principe.
On peut lire par exemple : « le raisonnement par récurrence a été inventé par Fermat et Pascal au XVII^{e} siècle, le principe de démonstration a été axiomatisé par Peano (1858-1932) à la fin du XIX^{e} siècle, et son nom lui a probablement été donné par Poincaré (1854-1912) en 1902. »


Pierre de Fermat


Blaise Pascal


Richard Dedekind


Giuseppe Peano

Historiquement, le raisonnement par récurrence a eu du mal à être formalisé comme on le connaît : il a longtemps été utilisé intuitivement sans le nommer.
A la fin du XIX^{e} siècle, les mathématiques vont connaître leur plus grande révolution avec le début de ce qu'on appellera plus tard la "crise des fondements", période de transition entre l'âge classique et les mathématiques actuelles marquée par un grand effort de réorganisation et d'abstraction afin de construire les mathématiques sur des bases plus solides, ce qui bouleversera l'architecture des mathématiques mais sauvegardera leur unité. C'est donc dans ce contexte qu'est proposé une définition axiomatique de l'ensemble des entiers naturels : en 1888 Dedekind propose une construction axiomatique des entiers naturels, dont les axiomes principaux sont l'existence du "1" et de la fonction "successeur". L'année suivante, Péano formule un ensemble d'axiomes équivalent mais plus simple, celui que l'on connaît.
Le raisonnement par récurrence apparaît donc comme un axiome dans la construction de $\mathbb{N}$.
Cependant, différentes constructions de $\mathbb{N}$ existent et **le raisonnement par récurrence peut alors être un théorème**.

B) La récurrence au fil des siècles

1. Avant le XVII^{e} siècle

Euclide et Archimède : on fait souvent remonter la récurrence à Euclide, ce qui est à la fois vrai et faux. On peut y voir un début de récurrence dans la proposition 20 des *Éléments* où est prouvée l'existence arbitrairement grande de nombres premiers. Cependant il y a juste une esquisse de récurrence mais elle n'est pas explicitée.
L'idée d'infini répugnait la mentalité grecque (raisons philosophiques : nombre de penseurs de l'époque estimant que l'univers était limité ; raisons mathématiques : absence de la notion de variable donc du passage de n à $n+1$ mais aussi absence d'un système de numération efficace, la notation grecque des entiers permettant de compter jusqu'à dix-mille avant que ça ne se complique).
De la même manière, Archimède encadre le nombre π en utilisant des polygones inscrits et circonscrits dont il double quatre fois de suite le nombre de côtés, mais n'évoque pas la possibilité d'aller plus loin.

2. Le XVII^{e} siècle, les pères fondateurs

Il existe d'assez nombreux exemples, européens ou non (arabes notamment), d'utilisation implicite de la récurrence avant le XVIIe siècle. Fibonacci, vers 1200, se sert de l'une et de l'autre (sans le dire, bien sûr) : en témoignent sa fameuse suite $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ … Il semble bien cependant que Pascal, pour la récurrence, et Fermat, pour la descente infinie, soient les premiers à avoir énoncé nettement ces principes et à en avoir reconnu la puissance et la généralité.

3. Les successeurs et l'axiomatisation de la construction des entiers naturels

Les deux principes ayant ainsi été clairement mis en place, on pourrait imaginer que les mathématiciens de l'époque se sont précipités sur ces deux superbes jouets, mais il n'en a rien été. On peut y voir deux raisons : l'essor foudroyant de l'analyse, des probabilités et de la mécanique, d'une part, et d'autre part la priorité alors donné à la découverte sur la démonstration.

Lorsque, en 1686, Jacob Bernoulli montre par récurrence la formule $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, il se croit obligé de décrire par le menu le mécanisme du travail. Cinquante ans plus tard, en 1735, quand le jeune Euler établit par récurrence le petit théorème de Fermat, lui aussi entre dans des détails qui montrent bien que ce mode de raisonnement reste inhabituel.
La récurrence ne deviendra un instrument peu à peu reconnu, grâce à Euler notamment, que dans la seconde moitié du XVIII^{e} siècle. Et c'est au long du XIX^{e} siècle que la communauté mathématique en viendra à les considérer d'abord comme un outil indispensable, puis comme la base même de l'édifice des nombres.

Les XVII^{e} et XVIII^{e} siècles avaient été une période de créativité presque anarchique, reléguant au second plan le souci de rigueur. Une remise en ordre étant devenue nécessaire, le XIX^{e} siècle a dû progressivement s'attaquer à la consolidation des bases. C'est ainsi que sont apparues une construction des nombres complexes, puis une construction des rationnels, puis en 1872 la construction des réels par Dedekind, édifiant ainsi tout l'édifice des nombres sur un socle unique : l'ensemble des entiers.
Jusqu'au dernier quart du XIX^{e} siècle, nul n'envisageait les entiers naturels autrement que comme une suite que l'on peut indéfiniment prolonger, ce que l'on a appelé un infini potentiel. Et cette suite restait considérée comme une donnée première, qu'il était hors de question de discuter (« Le Bon Dieu a fait les nombres naturels ; tout le reste est l'œuvre de l'homme », disait Kronecker).
Il ne restait plus qu'une étape à franchir pour faire des mathématiques un système logique irréprochable : axiomatiser la construction des entiers, ce qui fut fait. Mais cette ultime et triomphale avancée s'est révélée un saut à pieds joints dans un marécage.
En 1888 et 1889 parurent deux tentatives de construction de $\mathbb{N}$, reposant l'une et l'autre sur la récurrence.

Dedekind

En 1888, Dedekind (le dernier élève de Gauss) publia un opuscule intitulé « Que sont les nombres et que doivent-ils être ? ». Ce texte ne passa pas inaperçu, mais ne fit pas tellement de vagues… il aurait dû !
Jusqu'alors, en effet, les entiers naturels étaient considérés comme une donnée indiscutable et l'infini était envisagé comme une extrapolation à manipuler avec prudence. Dedekind a l'audace un peu folle de renverser totalement le point de vue : partir de l'infini, ce territoire suspect, pour légitimer ce qui nous est le plus familier, la suite 1, 2, 3, …
Dedekind définit ce qu'il appelle un « ensemble simplement infini N » par des propriétés.
C'est lui (et non, comme on le dit souvent, Peano) qui a introduit la notation N, initiale de *Nummer*, qui ne veut pas dire « nombre » mais « numéro ».

Peano

En 1889, Peano publia un court traité, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, rédigé pour moitié en latin et pour moitié dans un langage formalisé de son invention. Le but déclaré de l'ouvrage n'était rien de moins que donner aux mathématiques un fondement irréprochable et d'en faire une sorte de mécanique du raisonnement. Le traité est en trois parties dont une sur une construction axiomatique de $\mathbb{N}$.
Cette fois, le mot « axiomes » est bien écrit dans une liste de 9 axiomes un peu redondante.
Le contenu de ces axiomes est très proche de la définition donnée par Dedekind. Peano ne cache d'ailleurs pas ce qu'il doit à l'article de son prédécesseur dans lequel, dit-il, « les questions relatives aux fondements des nombres sont examinées de façon pénétrante ».
L'ouvrage fit beaucoup plus de bruit que celui de Dedekind et le terme « arithmétique de Peano » s'est maintenant imposé. Mais les « axiomes de Peano » sont maintenant présentés sous une forme plus condensée que la sienne et assez proche en fait de la présentation de Dedekind.

C) Axiomes de Peano, de Von Neumann et ordinale

Axiomes de DEDEKIND/PEANO[2] (1888 et 1889)

Il existe un ensemble N, dit ensemble des entiers naturels, vérifiant :

(1) 0 est un entier,
(2) Pour tout entier n, il existe un unique entier s(n) appelé son successeur,
(3) Aucun entier n'a 0 comme successeur,
(4) Deux entiers ayant le même successeur sont égaux,
(5) Si un ensemble d'entiers contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments alors cet ensemble est égal à N.

Un problème des nombres entiers selon Peano, c'est qu'ils sortent « de nulle part » (le 0 sort de nulle part).

Axiomes de VON NEUMANN (vers 1930)

Vers 1930, Von Neumann inscrit l'ensemble des entiers naturels (et donc l'arithmétique) dans un cadre plus grand qui permet de répondre à des questions sur les nombres qui la dépasse, comme le théorème de Goodstein[3], ou toutes les questions sur la répartition des nombres premiers.

John von Neumann,
né Neumann János Lajos

Axiomatique ORDINALE (???)

Il existe un ensemble N non vide vérifiant :

(1) N est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$
et toute partie non vide de N admet un plus petit élément,
(2) N n'est pas majoré,
(3) Toute partie non vide majorée de N possède un plus grand élément.

On peut montrer que cela définit un unique ensemble (à isomorphismes d'ensembles ordonnés) près donc on en choisit un, on le note N et on l'appelle ensemble des entiers naturels…
Et alors on peut démontrer le théorème de récurrence qui permet de définir le raisonnement par récurrence :

Soit $E \subset \mathbb{N}$, si $0 \in E$ et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $[n \in E \Rightarrow n^* \in E]$, alors $E=\mathbb{N}$.
(où n^* est le plus petit élément de $\{k \in \mathbb{N}, n<k\}$)

Bien sûr ces deux axiomatiques (Péano et ordinale) sont équivalentes.

2 En comparant leurs axiomes, on se rend compte que les axiomes que l'on appelle « de Péano » aujourd'hui sont ceux de Dedekind mais avec une construction qui évite celle de Dedekind (ensembles intuitifs, « partie simplement infinie »…).

3 Voir plus loin

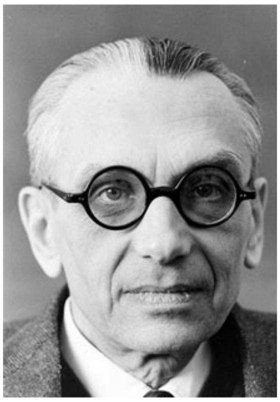
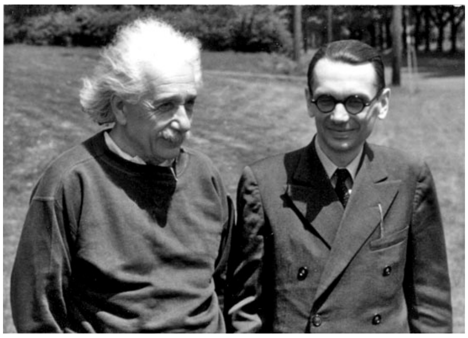
D) De Péano à Gödel, de Gödel à Goodstein, de Goodstein à Hercule !

Il faut pour légitimer une construction axiomatique **établir sa cohérence**, c'est-à-dire démontrer que ses axiomes sont compatibles. Devant cette difficulté majeure, les mathématiciens se sont aussitôt divisés en 2 camps : ceux qui, comme Poincaré, estimaient que le problème était par essence insoluble et ceux qui, comme Hilbert, espéraient. Et lorsqu'en 1900 ce dernier a dressé sa fameuse liste de 23 problèmes à résoudre en priorité par les mathématiciens du XX^e siècle, la preuve de la compatibilité des axiomes de Peano y figurait en 2nde position.

Sur ce terrain miné, les meilleurs spécialistes de logique mathématique ont travaillé d'arrache-pied. Ce qu'ils nous ont appris ne vient guère à l'appui de l'optimisme de Hilbert. En 1931, Kurt Gödel a en effet établi un « théorème d'incomplétude » dont résulte l'**impossibilité de démontrer la cohérence de l'arithmétique dans le cadre défini par les axiomes de Peano**. Il est vrai qu'en 1936 Gerhard Gentzen (1909-1945) a prouvé la cohérence en question… mais en débordant le cadre « péanien » pour se placer dans celui des « transfinis dénombrables », dont la cohérence, j'imagine, ne doit pouvoir se prouver que dans un cadre plus vaste…

← Kurt Gödel →



(en 1925)

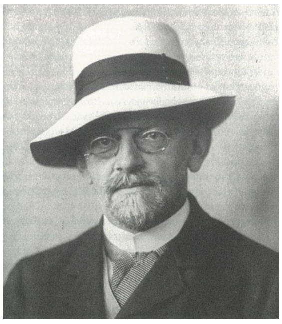
Gödel est mort fou, tout comme d'autres logiciens ayant traité des questions similaires comme Cantor, Zermelo, Post, Frege, Wittgenstein…

Ce que dit le théorème de Gödel

La notion de « démontrabilité » est toujours relative à un système d'axiomes. Cela veut dire qu'une certaine affirmation mathématique peut très bien être démontrable avec un système, mais pas avec un autre ! Ce dont ont voulu s'assurer Hilbert et sa bande au début du XX^{ème} siècle, c'est qu'il était possible de construire un système d'axiomes parfait, tel que toutes les propositions mathématiques vraies y soient démontrables. Un tel système serait dit « complet ».

Et c'est précisément cet espoir que Gödel a ruiné : il a démontré que dès que l'on veut faire au minimum de l'arithmétique des nombres entiers, quel que soit le système d'axiomes qu'on utilise, il existera toujours des énoncés vrais mais indémontrables. On dit que ces énoncés sont indécidables.

Cela signifie qu'il n'existe pas de système d'axiomes complet, et c'est pour cela que l'on appelle ce théorème, le théorème d'incomplétude.



David Hilbert en 1912

Gerhard Gentzen[4]

4 Entre Novembre 1935 et 1939, il est assistant de David Hilbert à Göttingen. Il rejoint le parti nazi en 1937. En avril 1939, il prête serment de loyauté envers Adolf Hitler dans le cadre de son poste à l'Université. À partir de 1943, il est professeur à l'Université de Prague. Dans le cadre d'un contrat avec la SS, Gentzen travaille pour le projet V-2. Après la guerre, il meurt de faim dans un camp après avoir été arrêté à Prague, le 7 mai 1945.

Le théorème de Goodstein : un théorème indémontrable !

Le théorème de Reuben Goodstein (1912-1985) est un énoncé arithmétique portant sur des suites, dites suites de Goodstein[5]. Les suites de Goodstein sont des suites d'entiers (introduites en 1944) à la croissance initiale extraordinairement rapide, et le théorème établit (en dépit des apparences, elles semblent tendre vers l'infini !) que toute suite de Goodstein finit par devenir décroissante et se termine par 0 (elle stationne alors).

Le théorème de Goodstein n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano (du premier ordre), mais peut être démontré dans des théories plus fortes, comme la théorie des ensembles.

C'est un théorème indémontrable... d'un point de vue arithmétique (de Péano) !
Il est donc **impossible de démontrer ce théorème par récurrence, même avec la meilleure imagination du monde**, et ça, c'est Laurence Kirby et Jeffrey Paris qui l'ont démontré !

La fonction de Goodstein G : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par la longueur de la suite de Goodstein G(n), *ie* le nombre d'entiers avant qu'elle arrive à 0. C'est une application, puisque toutes les suites de Goodstein se terminent.
Voici quelques exemples :

n	$\mathrm{G}(n)$
1	2
2	4
3	6
4	$3\times 2^{402\,653\,211}-3$
...	
12	Supérieur au nombre de Graham (!!!)

Un nombre assez impressionnant !

Le nombre $3\cdot 2^{402\,653\,211} - 3$, qui est la durée du vol 4 (selon les règles de Goodstein), est de l'ordre de $10^{121\,210\,695}$ et comprend donc plus de 121 000 000 de chiffres dans l'écriture décimale usuelle. Si on écrivait ces chiffres à raison de 100 chiffres par ligne et de 50 lignes par page, cela donnerait un livre de plus de 24 000 pages ! Notons qu'un tel vol est vraiment TRÈS long, car sa durée (au rythme, disons, d'une itération à chaque seconde) dépasserait nettement l'âge même de l'Univers : en se basant sur les mesures récemment effectuées par la sonde WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) de la NASA, on estime actuellement que le Big Bang remonte à environ 13,7 milliards d'années. Cela « ne donne » qu'environ 4,32 x 10^{17} secondes depuis la naissance de l'Univers, ce qui serait infime comparativement à la durée du vol 4. Et que dire du vol 1 948...

Nombre de Graham[6] :

$$G = \left.\begin{matrix} 3\uparrow\uparrow\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}\uparrow 3 \\ 3\uparrow\uparrow\underbrace{\cdots\cdots\cdots}\uparrow 3 \\ \vdots \\ 3\uparrow\uparrow\underbrace{\cdots}\uparrow 3 \\ 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix}\right\} \text{64 niveaux}$$

où on utilise les puissances itérées de Knuth[7] :

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{b \text{ exemplaires de } a}$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow a}_{b \text{ exemplaires de } a}$$

ainsi que l'opérateur *quadruple flèche* :

$$a \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow\uparrow a}_{b \text{ exemplaires de } a}$$

et ainsi de suite.

$$a \underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n} b = \underbrace{a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a \ \ldots \ a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a}_{b \text{ exemplaires de } a}$$

5 Voir http://eljjdx.canalblog.com/archives/2008/03/30/8536795.html
La suite de Goodstein (de graine 6) commence comme ça : 6, 29, 257, 3125, 46655, 98039, 187243, ... Mais comment est définie cette suite ? On part d'un nombre qui sera le premier terme de la suite. On le décompose en base 2 itérée. On remplace ensuite tous les 2 par des 3. On soustrait ensuite 1, et on obtient le deuxième terme de la suite. Pour obtenir le suivant, on décomposera ce nombre en base 3 itérée, et on remplacera les 3 par des 4, et ainsi de suite.

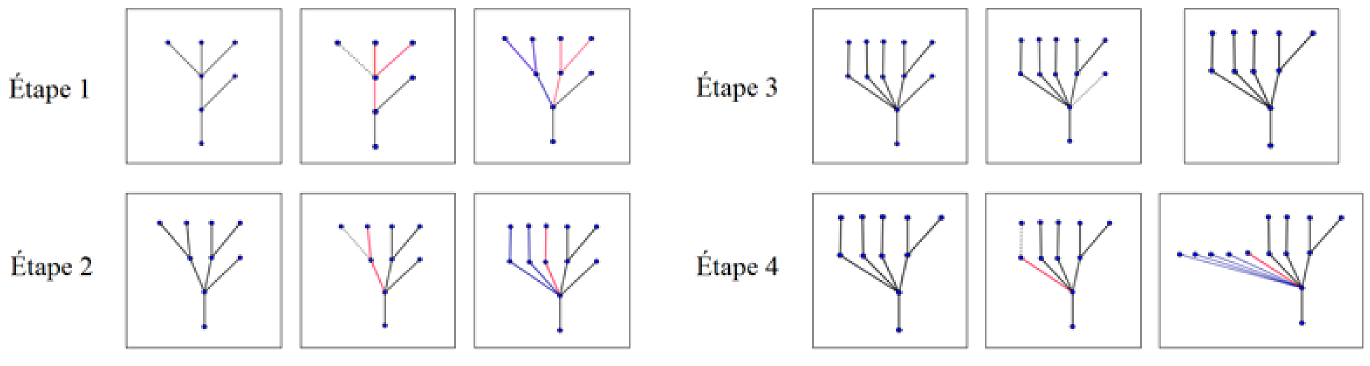
6 Le nombre de Graham, du nom du mathématicien Ronald Graham, est un entier naturel connu pour avoir été longtemps le plus grand entier apparaissant dans une démonstration mathématique : c'était une borne supérieure utilisée dans la démonstration d'un résultat de théorie des graphes colorés. Il est beaucoup trop grand pour être écrit grâce à la notation scientifique et nécessite une notation permettant d'écrire de très grands nombres.
Ce qui est drôle, c'est qu'il semble que le nombre n = 13 soit aussi une borne supérieure dans le problème considéré, mais personne jusqu'à aujourd'hui n'est capable de le démontrer ! Le nombre de Graham est donc aussi « la pire » borne jamais utilisée… C'est comme si j'écrivais 1 < 1000000000000000000000000. Pas très précis...

7 En mathématiques, la notation des puissances itérées de Knuth est une notation qui permet d'écrire de très grands entiers et qui a été introduite par Donald Knuth en 1976. L'idée de cette notation est basée sur la notion d'exponentiation répétée, au même titre que l'exponentiation consiste en une multiplication itérée ou la multiplication en une addition itérée.

De Goodstein à Hercule

Dans leur article, Kirby et Paris, mentionnent un autre processus qui présente des similarités profondes avec les suites de Goodstein : le jeu de l'hydre.
C'est un autre problème dans le même style (qui demande aussi de passer par les ordinaux pour être démontré), celui du deuxième des 12 travaux d'Hercule : tuer l'Hydre de Lerne, qui est un serpent d'eau à corps de chien possédant de multiples têtes qui peuvent se régénérer.

L'hydre est modélisée par un arbre. Les têtes de l'hydre sont, à tout instant, les sommets terminaux de l'arbre. Si Hercule coupe une tête qui n'est pas directement reliée à la racine de l'arbre en supprimant l'arête associée, l'hydre se régénère à partir des sommets situés à deux niveaux sous la tête coupée. Elle peut le faire de différentes façons.
Par exemple, dans l'exemple ci-dessous utilisé par Kirby et Paris, si la tête est coupée à l'étape n du jeu, l'hydre génère n copies de la partie de l'arbre située au-dessus de ce nœud.
A chaque étape, la partie coupée est indiquée en pointillés, la partie qui se régénère en rouge et la partie qui a repoussé en bleu.



Quelle stratégie doit prendre Hercule pour détruire toutes les têtes ?

Eh bien… même si l'hydre fait preuve de vice (dans le nombre de duplications) et Hercule preuve d'une extrême stupidité (dans le choix des têtes qu'il va choisir de couper), Hercule finira un jour par anéantir totalement l'hydre (après un nombre fini de têtes tranchées) !!

De la même façon que pour la suite de Goodstein, on ne peut pas utiliser la simple récurrence pour montrer que Hercule terminera un jour son travail...

Le seul problème, c'est que l'Univers risque de se détruire avant que Hercule ait terminé le boulot, vu le temps qui sera nécessaire !

Pour visualiser le jeu de l'hydre et essayer de comprendre la démonstration du théorème de l'hydre (Hercule parviendra à tuer l'hydre quelles que soient sa taille initiale et la stratégie utilisée), donc parler d'ordinaux de façon « ludique »,voir cette magnifique vidéo :
https://youtu.be/0tBScDTj0n0

Remarque : Kirby et Paris ont aussi démontré que le théorème de l'hydre est indécidable dans l'arithmétique de Péano !