Exercices supplémentaires (repères du plan)

Correction 1

1. On a les coordonnées suivantes :
$A(-4\,;-3)$; $B(2\,;4)$; $C(10\,;6)$; $D(4\,;-1)$

2. - Le milieu du segment $[AC]$ a pour coordonnées :
$$\Big(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\Big)=\Big(\frac{-4+10}{2}\,;\frac{-3+6}{2}\Big)=\Big(3\,;\frac{3}{2}\Big)$$
   - Le milieu du segment $[BD]$ a pour coordonnées :
$$\Big(\frac{x_B+x_D}{2}\,;\frac{y_B+y_D}{2}\Big)=\Big(\frac{2+4}{2}\,;\frac{4+(-1)}{2}\Big)$$
$$=\Big(\frac{6}{2}\,;\frac{3}{2}\Big)=\Big(3\,;\frac{3}{2}\Big)$$

   Les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
   Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
   $ABCD$ est un parallélogramme.

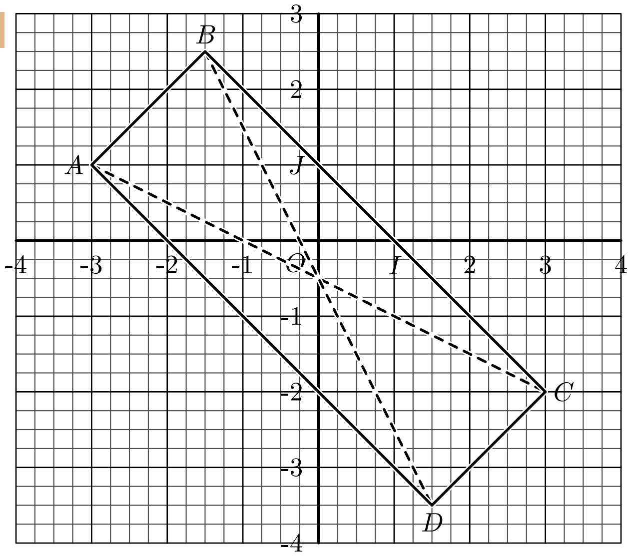
Correction 2

La résolution de cet exercice s'effectue en deux étapes :

- Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnée :
$$\Big(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\Big)=\Big(\frac{(-4)+3}{2}\,;\frac{(-1)+(-2)}{2}\Big)$$
$$=\Big(-\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\Big)$$
Le milieu de $[BD]$ a pour coordonnée :
$$\Big(\frac{x_B+x_D}{2}\,;\frac{y_B+y_D}{2}\Big)=\Big(\frac{(-3)+2}{2}\,;\frac{(-4)+1}{2}\Big)$$
$$=\Big(-\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\Big)$$
Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors ce quadrilatère est un rectangle.
$ABCD$ est un parallélogramme.

- Calculons maintenant les longueurs des diagonales :
$$AC=\sqrt{\big(x_C-x_A\big)^2+\big(y_C-y_A\big)^2}$$
$$=\sqrt{\big[3-(-4)\big]^2+\big[(-2)-(-1)\big]^2}$$
$$=\sqrt{7^2+(-1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$
$$BD=\sqrt{\big(x_D-x_B\big)^2+\big(y_D-y_B\big)^2}$$
$$=\sqrt{\big[(-3)-2\big]^2+\big[(-4)-1\big]^2}$$
$$=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$
On a : $AC=BD$
Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.
$ABCD$ est en fait un rectangle.

Correction 3

1. 

2. On a :
$$AC=\sqrt{\big(x_C-x_A\big)^2+\big(y_C-y_A\big)^2}=\sqrt{\big[3-(-3)\big]^2+\big(-2-1\big)^2}$$
$$=\sqrt{6^2+(-3)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$$

3. On a :
$$AB^2=\big(\sqrt{4{,}5}\big)^2=4{,}5\quad;\quad AC^2=\big(\sqrt{45}\big)^2=45$$
$$BC^2=\big(\sqrt{0{,}5}\big)^2=0{,}5$$
On remarque alors que : $AC^2=AB^2+BC^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

4. Montrons que $ABCD$ est un parallélogramme ; plusieurs approches sont possibles, je préfère ici montrer que les diagonales ont même milieu :
   - Milieu de $[AC]$:
$$\Big(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\Big)=\Big(\frac{(-3)+3}{2}\,;\frac{1+(-2)}{2}\Big)$$
$$=\Big(0\,;-\frac{1}{2}\Big)$$
   - Milieu de $[BD]$:
$$\Big(\frac{x_B+x_D}{2}\,;\frac{y_B+y_D}{2}\Big)=\left(\frac{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{2}\,;\frac{\frac{5}{2}+\Big(-\frac{7}{2}\Big)}{2}\right)$$
$$=\left(0\,;\frac{-\frac{2}{2}}{2}\right)=\Big(0\,;-\frac{1}{2}\Big)$$

   On en déduit que les deux diagonales ont même milieu.
   Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
   $ABCD$ est un parallélogramme.

   D'après la question 3., l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle droit.
   Si un parallélogramme possède un angle droit alors c'est un rectangle.
   $ABCD$ est un rectangle.

Correction 4

1. D étant le symétrique du point C par rapport au point B, on en déduit que le point B est le milieu du segment $[CD]$.

Les coordonnées du point D vérifient l'égalité suivante :

$$B(x_B\,;y_B) = \left(\frac{x_C+x_D}{2}\,;\frac{y_C+y_D}{2}\right)$$

On obtient les deux égalités suivantes :

$x_B = \dfrac{x_C+x_D}{2}$	$y_B = \dfrac{y_C+y_D}{2}$
$-4 = \dfrac{(-1)+x_D}{2}$	$2 = \dfrac{4+y_D}{2}$
$-8 = -1+x_D$	$4 = 4+y_D$
$x_D = -7$	$y_D = 0$

Le point D a pour coordonnées : $D(-7\,;0)$

2. Notons M le milieu du segment $[AC]$. Le point M a pour coordonnées :

$$M\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\right) = \left(\frac{3+(-1)}{2}\,;\frac{1+4}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{2}\,;\frac{5}{2}\right) = \left(1\,;\frac{5}{2}\right)$$

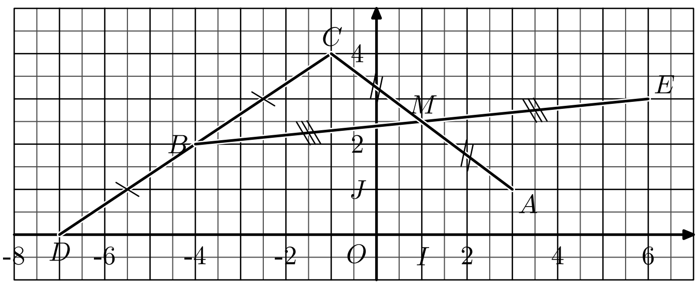
Dans le plan, le point E est placé de sorte que le segment $[BE]$ admette le point M pour milieu. Ainsi, il doit vérifier l'égalité suivante :

$$M(x_M\,;y_M) = \left(\frac{x_B+x_E}{2}\,;\frac{y_B+y_E}{2}\right)$$

On en déduit les deux égalités suivantes :

$x_M = \dfrac{x_B+x_E}{2}$	$y_M = \dfrac{y_B+y_E}{2}$
$1 = \dfrac{x_B+x_E}{2}$	$\dfrac{5}{2} = \dfrac{y_B+y_E}{2}$
$1 = \dfrac{(-4)+x_E}{2}$	$\dfrac{5}{2} = \dfrac{2+y_E}{2}$
$2 = -4+x_E$	$5 = 2+y_E$
$x_E = 6$	$y_E = 3$

Le point E a pour coordonnées : $E(6\,;3)$.



Correction 5

1. a. Déterminons les coordonnées du point K milieu du segment $[BD]$:

$$K\left(\frac{x_B+x_D}{2}\,;\frac{y_B+y_D}{2}\right) = \left(\frac{4+(-1)}{2}\,;\frac{5+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$$

Le quadrilatère $ABCD$ étant un parallélogramme ses diagonales se coupe en leurs milieux : le point K est également le milieu du segment $[AC]$.

Ainsi, les coordonnées du point C vérifieent l'égalité suivantes :

$$K\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\right) = \left(\frac{-2+x_C}{2}\,;\frac{4+y_C}{2}\right)$$

En identifiant les abscisses et les ordonnées de ces deux coordonnées, on obtient les deux égalités suivantes :

$\dfrac{-2+x_C}{2} = \dfrac{3}{2}$	$\dfrac{3+y_C}{2} = \dfrac{5}{2}$
$-2+x_C = 3$	$3+y_C = 5$
$x_C = 5$	$y_C = 2$

Ainsi, le point C a pour coordonnées : $C(5\,;2)$

b. Déterminons les longueurs des deux diagonales du quadrilatère $ABCD$:

- $AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$

$$= \sqrt{\big[5-(-2)\big]^2+(2-3)^2} = \sqrt{7^2+(-1)^2}$$

$$= \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

- $BD = \sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2}$

$$= \sqrt{(-1-4)^2+(0-5)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2}$$

$$= \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$$

Ainsi, on a : $AC = BD$

Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors ce parallélogramme est un rectangle.

$ABCD$ est un rectangle.

2. a. Déterminer les milieux des segments $[AB]$ et $[EF]$:

- Le point M milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{4+(-2)}{2}\,;\frac{3+5}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{2}\,;\frac{8}{2}\right) = (1\,;4)$$

- Le point N milieu du segment $[EF]$ a pour coordonnées :

$$N\left(\frac{x_E+x_F}{2}\,;\frac{y_E+y_F}{2}\right) = \left(\frac{2+0}{2}\,;\frac{1+7}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{2}\,;\frac{8}{2}\right) = (1\,;4)$$

Les segments $[AB]$ et $[EF]$ ont même milieu.

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Le quadrilatère $AEBF$ est un parallélogramme.

b. Déterminons la longueur de côtés consécutifs :

- $AE = \sqrt{(x_E-x_A)^2+(y_E-y_A)^2}$

$$= \sqrt{\big[2-(-2)\big]^2+(1-3)^2} = \sqrt{4^2+(-2)^2}$$

$$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

- $EB = \sqrt{(x_B-x_E)^2+(y_B-y_E)^2}$

$$= \sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2} = \sqrt{2^2+4^2}$$

$$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Les segments $[AE]$ et $[EB]$ ont même longueurs.

Si un parallélogramme a deux de ses côtés consécutifs de même longueur alors ce parallélogramme est un losange.

$AEBF$ est un losange.

c. Déterminons les deux longueurs suivantes :

- $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$$= \sqrt{\big[4-(-2)\big]^2+(5-3)^2} = \sqrt{6^2+2^2}$$

$$= \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

- $EF = \sqrt{(x_F-x_E)^2+(y_F-y_E)^2}$

$$= \sqrt{(0-2)^2+(7-1)^2} = \sqrt{(-2)^2+6^2}$$

$$= \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

On a : $AB = EF$

Si un losange a ses diagonales de même longueur alors ce losange est un carré.
$AEBF$ est un carré.