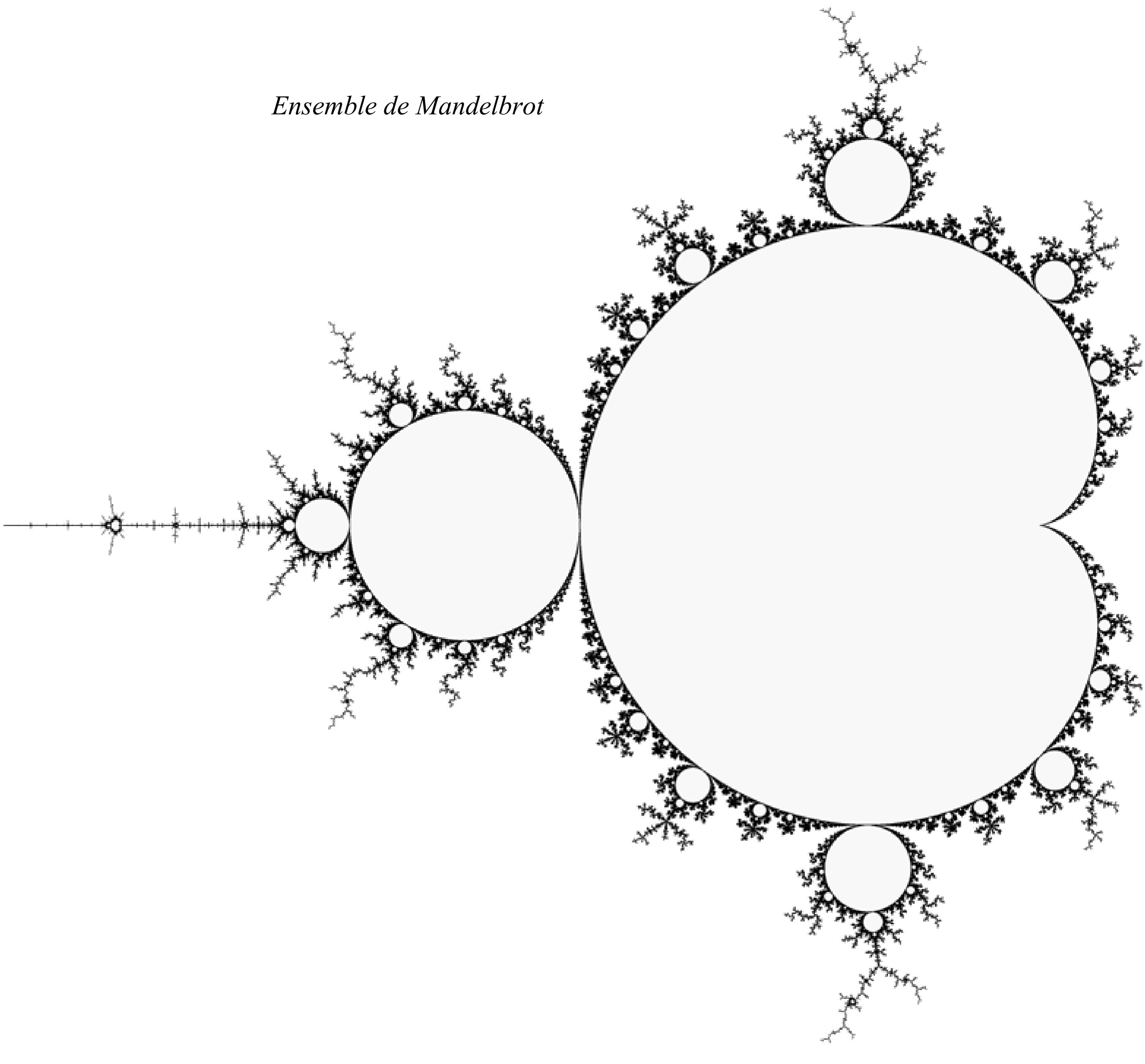
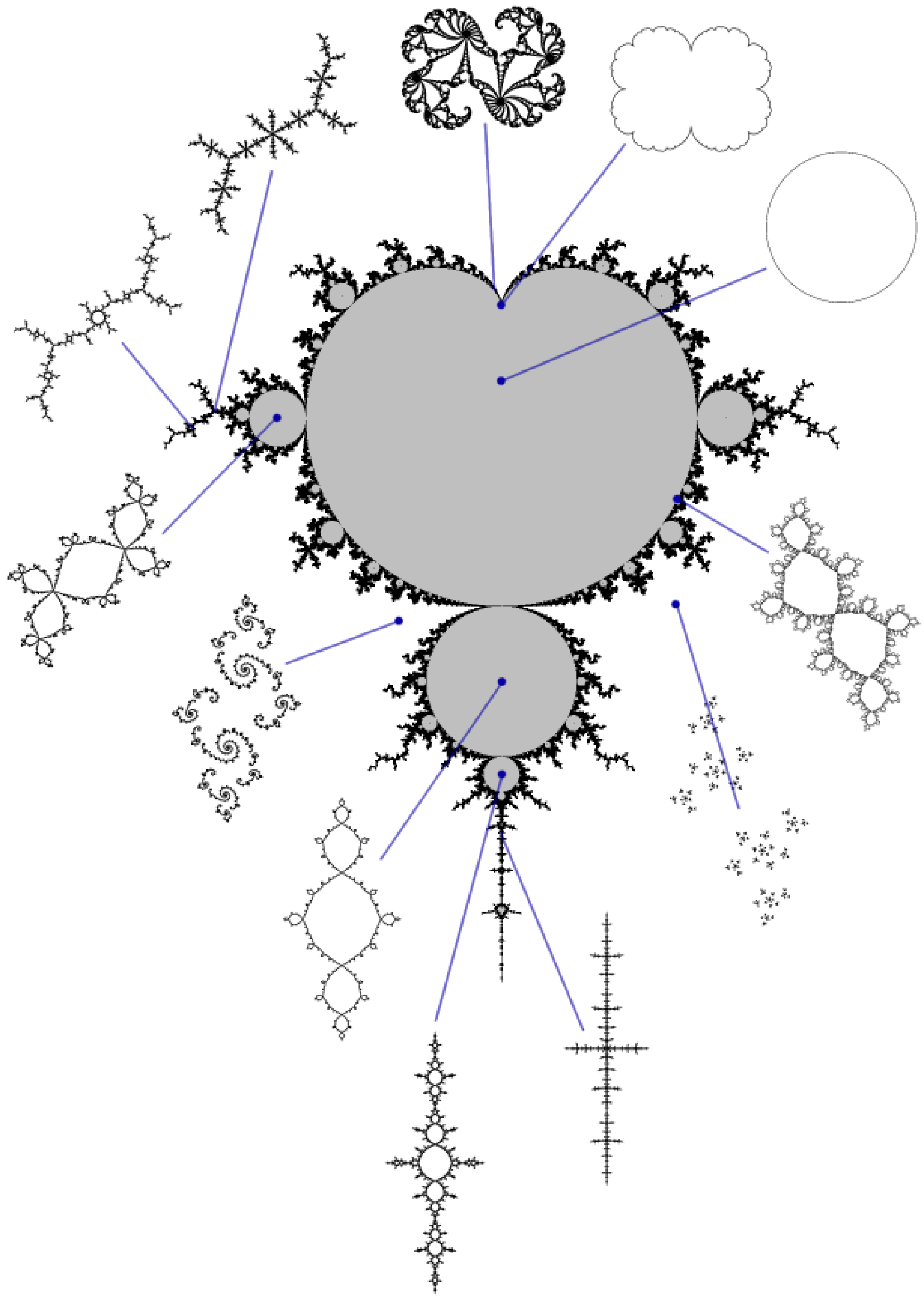
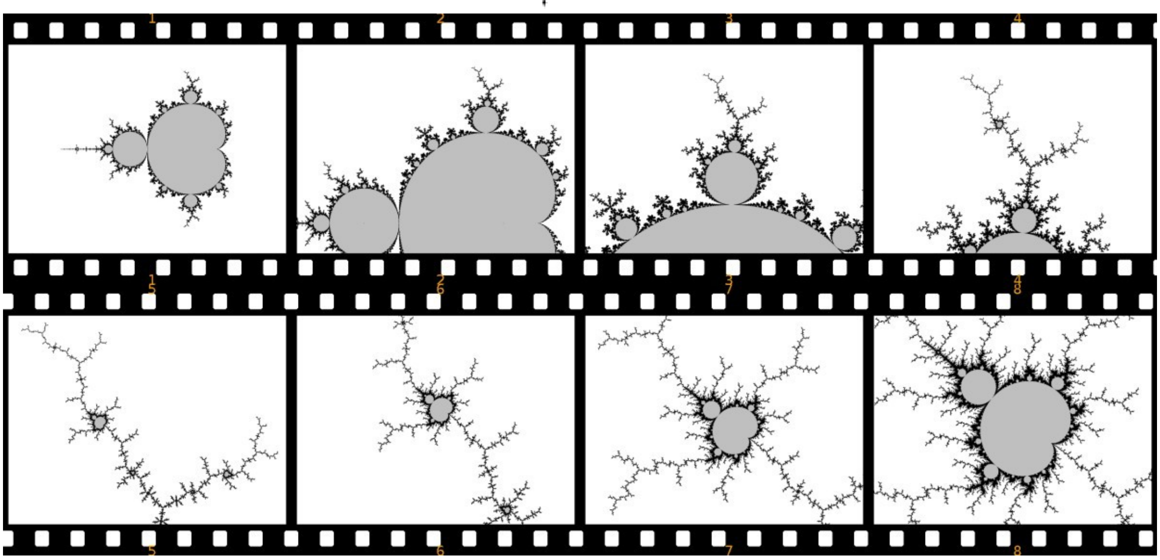
NOMBRES COMPLEXES : PARTIE 1

Ensemble de Mandelbrot



Source des images : http://images.math.cnrs.fr/L-ensemble-de-Mandelbrot.html





I. Définition

PROPRIÉTÉ-DÉFINITIONS.

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels ;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui possèdent les mêmes propriétés que dans l'ensemble des nombres réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i qui vérifie .... ;
- tous les éléments de $\mathbb{C}$ s'écrivent de manière unique sous la forme ....

Cet ensemble est appelé ***ensemble des nombres complexes***.

L'écriture $a+\mathrm{i}b$ s'appelle .... du nombre complexe z.
Le nombre réel a s'appelle .... de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
Le nombre réel b s'appelle .... de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

On a donc, par l'unicité de l'écriture algébrique :

PROPRIÉTÉS.

- $a+\mathrm{i}b=a'+\mathrm{i}b' \Leftrightarrow$ ....
- $a+\mathrm{i}b=0 \Leftrightarrow$ ....

<u>Exemple</u> : résoudre l'équation $3z+2-4\mathrm{i}=3$ dans $\mathbb{C}$.

II. Opérations et propriétés usuelles

On applique les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$. Voici quelques exemples de calculs.

Exercice II.1 :
1. Calculer i^3 , i^4 et $(1+i)^3$.
2. On considère les nombres complexes $z=5-4i$ et $z'=1+i$.
Calculer $z+z'$ et zz'. Puis calculer $3z-4iz'$ et z^2 .

PROPRIÉTÉS. • Tout nombre complexe non nul admet ....
• $zz'=0 \Leftrightarrow$ ....

Démonstrations :

Exercice II.2 :
1. Déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{3+4i}$ et de $\frac{4+3i}{1-2i}$.

2. Résoudre l'équation $64-(z+3i)^2=0$.

3. Résoudre l'équation $z^4-16=0$.

4. Calculer $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^9$ et $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{35}$.

III. Équations du second degré dans ℂ

THÉORÈME. Solutions d'une équation de degré 2 dans ℂ

Soient a, b et c des réels, avec $a \neq 0$.

On note (E) l'équation $az^2+bz+c=0$ et S l'ensemble de ses solutions.

On note Δ son discriminant : $\Delta =$ ....

- Si $\Delta > 0$: $S =$ ....
- Si $\Delta = 0$: $S =$ ....
- Si $\Delta < 0$: $S =$ ....

Démonstration : en classe.

Exemple : résoudre dans ℂ l'équation $2z^2+z+1=0$.

PROPRIÉTÉ. Factorisation d'un polynôme de degré 2 dans ℂ

Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ (avec éventuellement $z_1=z_2$ dans le cas où $\Delta=0$). Alors :

$$\forall \; z \in \mathbb{C}, \; az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2).$$

Exemple : factoriser $2z^2+z+1$ dans ℂ.

IV. Représentation géométrique d'un nombre complexe

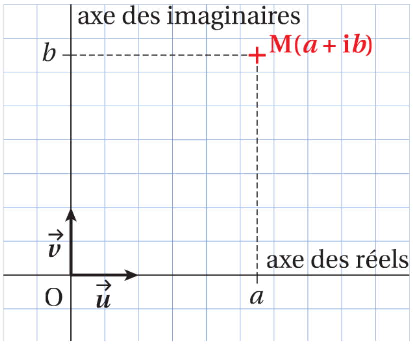
Dans ce qui suit, le plan est muni d'un **repère orthonormé direct** $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$.

IV.1 Affixe d'un point, d'un vecteur

DÉFINITION. **Affixe d'un point**

A tout complexe $z=a+\mathrm{i}b$, on associe le point M $(a;b)$ appelé ***image de z*** et noté $\mathrm{M}(z)$.

Réciproquement, à tout point M $(a;b)$, on associe le complexe $z=a+\mathrm{i}b$ appelé ***affixe du point M***.



DÉFINITION. **Affixe d'un vecteur**

A tout nombre complexe $z=a+\mathrm{i}b$, on associe le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a;b)$ dans le plan.

Réciproquement, à tout vecteur $\vec{w}$ du plan de coordonnées $(a;b)$, on associe le complexe $z=a+\mathrm{i}b$ appelé ***affixe du* vecteur** $\vec{w}$.

	Vecteurs	**Nombres complexes**
Somme	Si $\vec{v}(a;b)$ et $\vec{v}'(a';b')$ alors $\vec{v}+\vec{v}'$	Si $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$ alors $z+z'=$ ....
Produit par un réel k	Si $\vec{v}(a;b)$ alors $k\vec{v}$	Si $z=a+\mathrm{i}b$ alors $kz=$ ....

On observe une grande correspondance entre ces opérations. On en déduit les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS. Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{v}}$ et $z_{\vec{w}}$.

- Le vecteur $\vec{v}+\vec{w}$ a pour affixe ....
- Si $k \in \mathbb{R}$, alors le vecteur $k\vec{v}$ a pour affixe ....

Démonstration : en classe.

PROPRIÉTÉ.

Soient M et N deux points du plan d'affixes respectives z_{M} et z_{N}.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ est ....

Autrement dit : ....

Démonstration : en classe.

IV.2 Module d'un nombre complexe

DÉFINITION.

Soit $z=a+\mathrm{i}b$ un nombre complexe.

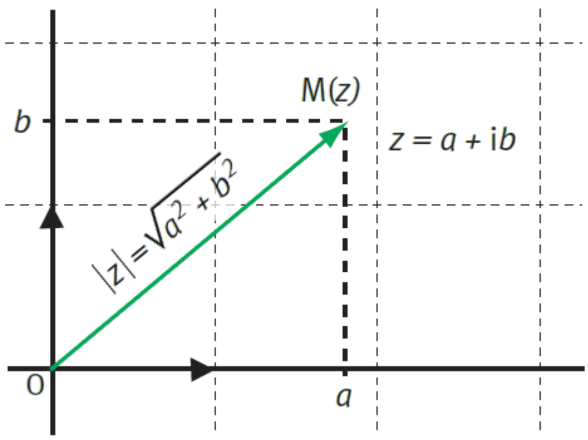
Le ***module de z*** est le nombre réel positif, noté $|z|$, tel que : ....

Pourquoi cette notation ? Eh bien, si z est un réel, alors son module est égal à sa valeur absolue… Ceci justifie l'emploi de la même notation.

PROPRIÉTÉ. **Interprétation géométrique du module**

Soit $z=a+\mathrm{i}b$ un nombre complexe et M son image dans un repère orthonormé d'origine O.

Alors : $|z|=\mathrm{OM}$.



<u>Démonstration</u> : en classe.

PROPRIÉTÉS.

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $|zz'|=$ .... *(le module d'un produit est égal au* .... *des modules)*

  et $|z^n|=$ .... pour tout $n \in \mathbb{N}$
- si $z\neq 0$ alors $\left|\frac{1}{z}\right|=$ .... *(le module de l'inverse est égal à* ....*du module)*

  et $\left|\frac{z'}{z}\right|=$ .... *(le module d'un quotient est égal au* ....*des modules)*
- $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$ *(inégalité triangulaire)*

<u>Démonstrations</u> : en classe.

Remarque : les modules de produits et quotients sont aisés. Les modules de sommes ne sont <u>pas</u> faciles.

IV.3 Distance entre deux points et affixes

PROPRIÉTÉS.

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

$$\mathrm{AB}=|z_B-z_A| \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\left|\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right|.$$

Démonstration :

Soit E le point d'affixe z_B-z_A.
Donc : $z_E=z_B-z_A$.
Or : $z_E=z_{\overrightarrow{OE}}$ et $z_B-z_A=z_{\overrightarrow{AB}}$, donc $z_{\overrightarrow{OE}}=z_{\overrightarrow{AB}}$
donc $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AB}$ et par conséquent $\mathrm{OE}=\mathrm{AB}$.
Or : $\mathrm{OE}=|z_E|=|z_B-z_A|$ donc $|z_B-z_A|=\mathrm{AB}$.
La propriété suivante est une simple conséquence de cela et $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$.

V. Complexe conjugué

DÉFINITION.

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $a+\mathrm{i}b$.

Le ***complexe conjugué*** de z est le complexe, noté $\bar{z}$, d'écriture algébrique . . . .

Exemples : $\overline{4-2\mathrm{i}}=$

$\bar{\mathrm{i}}=$

$\overline{-4}=$

PROPRIÉTÉS.

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $\bar{\bar{z}}=$ . . . .
- $\overline{z+z'}=$ . . . .
- $\overline{zz'}=$ . . . .
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=$ . . . .
- Si $z'\neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=$ . . . .
- $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n}=$ . . . .
- $z\bar{z}=$ ....
- $|\bar{z}|=|z|=|-z|$

Démonstrations : en classe.

Exercice V.1 :

1. Déterminer les nombres complexes tels que $z\bar{z}+3(z-\bar{z})=14-7\mathrm{i}$.

2. Calculer le conjugué de $z_1=(5+2\mathrm{i})(7\mathrm{i}-5)$, $z_2=\frac{5-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}$ et $z_3=\frac{(\mathrm{i}+2)(3-2\mathrm{i}z)}{z^2-\bar{z}}$ ($z\neq 0$ et $z\neq 1$).

3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que z^2-2z+7 est un réel.

VI. Les complexes sont-ils compliqués ? Pourquoi « complexes » ?

Au contraire, ils simplifient les calculs. Ce nom de « complexe » a été proposé par Carl Friedrich Gauss au début du XIX^e^ siècle. Pour ce mathématicien allemand, les mathématiques étaient ancrées dans la réalité physique : il n'appréciait donc pas le terme d'imaginaire.
Alors, pourquoi ce dernier a-t-il choisi ce nom de nombres complexes si leur usage est simplificateur ?
***Il signifie en fait qu'ils sont composés** de deux nombres réels.*

sources : Wikipédia et lectures diverses

Introduction du vocabulaire et des notations

Terme ou notation	Signification	Auteur	Date
R̷. m. 15	Un nombre *impossible* dont le carré vaudrait -15	Cardan	1545
« Imaginaire »	Toute quantité contenant la racine carrée d'un nombre négatif	Descartes	1637
i	$\sqrt{-1}$	Euler	1777
Module	Le module du complexe $a+ib$ est $\sqrt{a^2+b^2}$	Argand	1806
$\|z\|$	Module de z (ou valeur absolue de z)	Karl Weierstrass	
Conjugué	Le conjugué de $a+ib$ est $a-ib$	Cauchy	1821
Nombre complexe	$a+ib$	Gauss	1831
Imaginaire pur	ib	Gauss	1831
« Norme »	Carré du module	Gauss	1831
Argument du complexe z	Angle entre le vecteur associé à 1 et celui associé à z	Cauchy	1838
Affixe	L'affixe du point A de coordonnées (a;b) est le complexe $a+ib$	Cauchy	1847

Les complexes pour commander des robots ?

*Dans d'autres contextes comme l'étude des rotations de l'espace, les mathématiciens ont inventé différents ensembles de nombres contenant les nombres complexes. Le plus simple est le corps gauche des **quaternions**, où gauche signifie que le produit n'y est pas commutatif. Ce corps a l'avantage de ramener les calculs sur les rotations de l'espace à des calculs sur des nombres. Il est particulièrement utilisé en informatique, pour commander des robots ou des satellites.*

***L'usage des complexes permet de résoudre des problèmes de géométrie plane** car toutes les propriétés géométriques ont une traduction en termes de nombres complexes. Les produits d'une rotation et d'une homothétie correspondent à une multiplication, ce qui simplifie les calculs.*

Source : http://www.larecherche.fr/idees/back-to-basic/nombres-complexes-01-12-2007-89121

\- -

Nous n'imaginons pas combien les complexes sont utilisées de nos jours.

En optique, en électricité… ils sont partout !

\- En 1893, Arthur Edwin Kennelly remarque que l'on peut généraliser la loi d'Ohm U = RI au courant alternatif en utilisant les complexes.

\- Beaucoup de phénomènes électriques, particulièrement ceux concernant les lignes téléphoniques et les réseaux combinant résistances, inductances et capacités (les circuits RLC), conduisent à des équations différentielles de la forme $ay''+by'+cy=f$, qui peuvent être résolues à l'aide des nombres complexes : leur utilisation a augmenté à l'extrême la puissance du calcul.

\- Les nombres complexes sont à l'origine de méthodes utilisées pour accélérer les multiplications de grands nombres entiers par les circuits imprimés des ordinateurs. Ils permettent donc de gagner de l'énergie et du temps, beaucoup de temps… donc de l'argent.

- Les complexes apparaissent également dans les séries de Fourier*[1] et dans la résolution des équations différentielles linéaires (donc dans des branches nombreuses et diverses).

- En physique, Albert Einstein a eu besoin de lui pour démonter sa théorie de la relativité…
En relativité spéciale et générale, certaines formules de la métrique sur l'espace-temps deviennent plus simples si l'on considère que la composante temporelle du continuum espace-temps est imaginaire. Cette approche n'est plus standard en relativité classique, mais est utilisée de façon essentielle dans la théorie des champs quantiques. Les nombres complexes sont essentiels aux *spinors*, qui sont une généralisation des tenseurs utilisés en relativité.

- En mathématiques, ils permettent de définir la fonction Zêta de Riemann, qui a un lien étonnant avec la répartition des nombres premiers et donc avec la cryptographie actuelle (cartes bancaires, internet, etc.)…
Ce problème (l'hypothèse de Riemann) est d'ailleurs récompensée d'un million de dollars par l'institut Clay depuis l'an 2000.

- Ils sont aussi à l'origine de la plus célèbre des fractales : l'ensemble de Mandelbrot.
Et par conséquent du développement de certains effets spéciaux au cinéma dans les années 1980, etc.

- Les formules de base originales de la mécanique quantique - l'équation de Schrödinger et la mécanique matricielle d'Heisenberg - utilisent des nombres complexes.

1 « Un signal périodique de fréquence f et de forme quelconque peut être obtenu en ajoutant à une sinusoïde de fréquence f (fondamentale), des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de f.
De même, on peut décomposer toute onde récurrente en une somme de sinusoïdes (fondamentale et harmoniques). ».
C'est très utilisé en musique (studio d'enregistrement, traitement du son dans une salle de concert, etc) mais aussi pour la compression de pistes audio (mp3 etc), dans les traitements du son (réverbération pour une salle de conférence, construction d'un mur anti-bruit face à une rocade, etc).