Suites - Révisions

Correction 1

a. Pour la suite $\big(u_n\big)$ définie par $u_n=2{\cdot}n^2-n+1$, on a :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	2	7	16	29

b. Pour la suiie $\big(v_n\big)$ définie par $v_n=\dfrac{2{\cdot}n+1}{2-3{\cdot}n}$, on a :

n	0	1	2	3	4
v_n	$\dfrac{1}{2}$	-3	$-\dfrac{5}{4}$	-1	$-\dfrac{9}{10}$

c. Pour la suite $\big(w_n\big)$ définie par $w_n=\sqrt{3n+25}$, on a :

n	0	1	2	3	4
w_n	5	$2\sqrt{7}$	$\sqrt{31}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{37}$

d. Pour la suite $\big(x_n\big)$ définie par $x_n=3{\cdot}\big[1+(-1)^n\big]+2$, on a :

n	0	1	2	3	4
x_n	8	2	8	2	8

Correction 2

1. a. $u_{n-3}=5+2{\times}(n-3)=5+2{\times}n-6=-1+2{\times}n$

b. $u_{n-3}+u_3=\big(-1+2{\times}n\big)+\big(5+2{\times}3\big)=10+2{\times}n$

c. $u_{n-5}+u_5=\big[5+2{\times}(n-5)\big]+\big(5+2{\times}5\big)$
$=5+2{\times}n-10+5+10=10+2{\times}n$

d. Soit k un entier tel que $0\leqslant k\leqslant n$, on a :

- $u_k=5+2{\times}k$
- $u_{n-k}=5+2(n-k)=5+2{\times}n-2{\times}k$

On a la simplification :

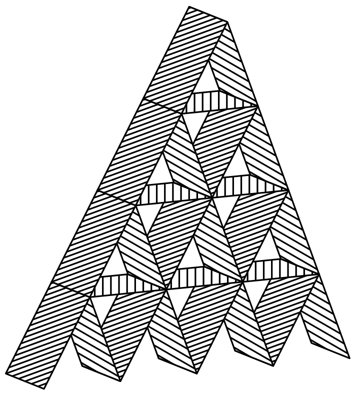
$$u_k+u_{n-k}=\big(5+2{\times}k\big)+\big(5+2{\times}n-2{\times}k\big)$$
$$=5+2k+5+2n-2k=10+2n$$

2. a. $v_{n+1}=2(n+1)^2-3(n+1)+2$
$=2(n^2+2n+1)-3n-3+2$
$=2n^2+4n+2-3n-3+2=2n^2+n+1$

b. $v_{n+1}-v_n=\big(2n^2+n+1\big)-\big(2n^2-3n+2\big)$
$=2n^2+n+1-2n^2+3n-2=4n-1$

Correction 3

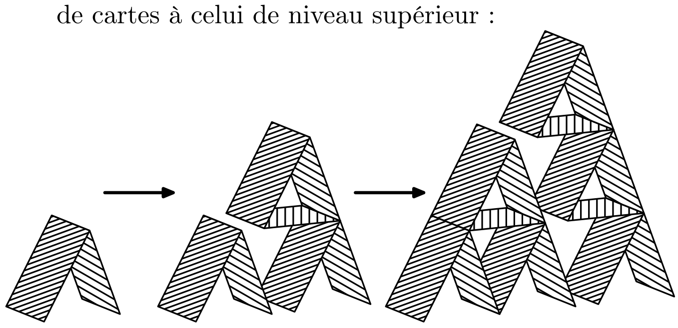
1. Le dessin ci-dessous représente le château de cartes lié au quatrième terme de la suite :



u_3

Ainsi : $u_3=26$

2. Pour obtenir la relation de récurrence, nous utilisons le schéma ci-dessous représentant le passage d'un château de cartes à celui de niveau supérieur :



u_0 $\qquad u_1 \qquad u_2$

On remarque que pour passer du château de rang n à celui de rang $(n{+}1)$, on rajoute :

- $2{\cdot}(n{+}2)$ cartes obliques ;
- $n{+}1$ cartes horizontales.

On obtient ainsi, la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1}=u_n+2(n+2)+(n+1)=u_n+3n+5$$

3. La relation de récurrence précédente permet d'obtenir le tableau suivant des valeurs des termes de la suite $\big(u_n\big)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	2	7	15	26	40	57	77	100	126	155

Avec 144 cartes au total, on peut atteindre le terme u_8 correspondant à château de cartes à 9 étages.

Correction 4

a. On a les quatre premiers termes de la suite $\big(u_n\big)$:

- $u_0=\dfrac{2{\times}0^2+0+5}{0+1}=\dfrac{5}{1}=5$
- $u_1=\dfrac{2{\times}1^2+1+5}{1+1}=\dfrac{8}{2}=4$
- $u_2=\dfrac{2{\times}2^2+2+5}{2+1}=\dfrac{15}{3}=5$
- $u_3=\dfrac{2{\times}3^2+3+5}{3+1}=\dfrac{26}{4}=\dfrac{13}{2}$

b. Voici les premiers termes de la suite $\big(u_n\big)$:

- $u_0=2$
- $u_1=\dfrac{1}{2}{\cdot}u_0+3=\dfrac{1}{2}{\times}2+3=1+3=4$
- $u_2=\dfrac{1}{2}{\cdot}u_2+3=\dfrac{1}{2}{\times}4+3=5$
- $u_3=\dfrac{1}{2}{\cdot}u_3+3=\dfrac{1}{2}{\times}5+3=\dfrac{5}{2}+\dfrac{6}{2}=\dfrac{11}{2}$

c. On a :

- $u_0=-1$
- $u_1=u_0+0-2=-1+0-2=-3$
- $u_2=u_1+1-2=-3+1-2=-4$
- $u_3=u_2+2-2=-4+2-2=-4$

d. On a les premiers termes :

- $u_0 = 2$
- $u_1 = 3$
- $u_2 = u_1 + 2{\cdot}u_0 = 3 + 2{\times}2 = 7$
- $u_3 = u_2 + 2{\cdot}u_1 = 7 + 2{\times}3 = 7 + 6 = 13$

Correction 5

1. La suite $\big(u_n\big)$ est définie par la formule explicite :
$u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
où f est la fonction définie par la relation :
$f(x) = -2x^2 - 3x + 2$

Cette fonction est un polynôme du second degré dont le coefficient du terme du second degré est négatif. De plus, le sommet de la parabole a pour abscisse :
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2{\times}(-2)} = -\frac{3}{4}$$
On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
Variation de f	↗		↘

Ainsi, la fonction f est décroissante sur $\Big[-\frac{3}{4}\,;+\infty\Big[$: on en déduit que la suite $\big(u_n\big)$ est décroissante sur $\mathbb{N}$.

2. a. Le dénominateur d'un quotient ne devant jamais être nul, La fonction g a pour ensemble de définition :
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\Big\{-\frac{5}{2}\Big\}$.

b. La fonction g est définie par le quotient des deux fonctions u et v où :
$u(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad v(x) = 2x + 5$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 4x \quad ; \quad v'(x) = 2$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{4x(2x+5) - (2x^2+1){\times}2}{(2x+5)^2}$$
$$= \frac{8x^2 + 20x - (4x^2+2)}{(2x+5)^2} = \frac{8x^2 + 20x - 4x^2 - 2}{(2x+5)^2}$$
$$= \frac{4x^2 + 20x - 2}{(2x+5)^2}$$

c. Le dénominateur étant strictement positif sur $\mathcal{D}_f$, le signe de la dérivée f' ne dépend que du signe du numérateur du quotient.
Le discriminant du polynôme $4x^2+20x-2$ a pour valeur :
$$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4{\times}4{\times}(-2) = 400 + 32 = 432$$
On a la simplification :
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{432} = \sqrt{144{\times}3} = 12\sqrt{3}$$
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20-12\sqrt{3}}{2{\times}4} = \frac{4{\cdot}\big(-5-3\sqrt{3}\big)}{2{\times}4} = \frac{-5-3\sqrt{3}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20+12\sqrt{3}}{2{\times}4} = \frac{4{\cdot}\big(-5+3\sqrt{3}\big)}{2{\times}4} = \frac{-5+3\sqrt{3}}{2}$$

A l'aide de la calculatrice, on remarque que :
$$\frac{-5-3\sqrt{3}}{2} < -\frac{5}{2} < 0 < \frac{-5+3\sqrt{3}}{2}$$
On obtient le tableau de signe suivant de la dérivée f' :

x	$-\infty$		$\frac{-5-3\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{-5+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$2x^2+10x-1$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On obtient le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{5}{2}$		x_2		$+\infty$
Variation de f		↗		↘	$\Vert$	↘		↗	

On en déduit que la fonction f est croissante sur $\Big[\frac{-5+3\sqrt{3}}{2}\,;+\infty\Big[$. Or : $\frac{-5+3\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}098$.
On en déduit que la suite $\big(v_n\big)$ est croissante à partir du rang 1.

d. D'après la question précédente, on sait déjà que la suite $\big(u_n\big)$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$. C'est à dire qu'on a :
$u_n \leqslant u_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}^*$
Déterminons les deux premiers termes de la suite :

- $v_0 = \dfrac{2{\times}0^2+1}{2{\times}0+5} = \dfrac{1}{5}$
- $v_1 = \dfrac{2{\times}1^2+1}{2{\times}1+5} = \dfrac{2+1}{2+5} = \dfrac{3}{7}$

On remarque la comparaison : $v_0 \leqslant v_1$
Ainsi, on vient d'établir que la relation $v_n \leqslant v_{n+1}$ est réalisée sur $\mathbb{N}$.
La suite $\big(v_n\big)$ est croissante sur $\mathbb{N}$.

Correction 6

1. La différence de deux termes consécutifs de la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ donne :
$$u_{n+1} - u_n = \big[-32{\cdot}(n+1) + 102\big] - \big[-32{\cdot}n + 102\big]$$
$$= -32{\cdot}n - 32 + 102 + 32{\cdot}n - 102$$
$$= -32$$
Puisque, on a : $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La différences de deux termes quelconques de la suite est négatif. On en déduit que la suite $\big(u_n\big)$ est décroissante sur $\mathbb{N}$.

2. Etudions le signe de la différence de deux termes consécutifs de la suite $\big(v_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$v_{n+1}-v_n=\sqrt{2(n+1)-1}-\sqrt{2n-1}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{2(n+1)-1}-\sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{2(n+1)-1}+\sqrt{2n-1}\right)}{\sqrt{2(n+1)-1}+\sqrt{2n-1}}$$
$$=\frac{\left[2(n+1)-1\right]-\left(2n-1\right)}{\sqrt{2(n+1)-1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2n+2-1-2n+1}{\sqrt{2(n+1)-1}+\sqrt{2n+1}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2(n+1)-1}+\sqrt{2n+1}}\ >\ 0$$

La suite $\left(v_n\right)$ est une suite croissante sur $\mathbb{N}$ puisque la différence de deux termes consécutifs est toujours positif.

3. Etudions la différence $w_{n+1}-w_n$:

$$w_{n+1}-w_n=\left[2(n+1)-\frac{25}{n+1}\right]-\left(2n-\frac{25}{n}\right)$$
$$=2n+2-\frac{25}{n+1}-2n+\frac{25}{n}=2+\frac{25}{n}-\frac{25}{n+1}$$
$$=2+\frac{25(n+1)}{n(n+1)}-\frac{25n}{n(n+1)}=2+\frac{25(n+1)-25n}{n(n+1)}$$
$$=2+\frac{25}{n(n+1)}\ >\ 0$$

La différence de deux termes de la suite $\left(w_n\right)$ étant positive sur $\mathbb{N}^*$, on en déduit la suite $\left(w_n\right)$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

Correction 7

a. $u_{12}=u_5+7{\cdot}r$ b. $u_{57}=u_{38}+19{\cdot}r$

c. $u_3=u_8-5{\cdot}r$ d. $u_{23}=u_{38}-15{\cdot}r$

Correction 8

a. $u_7=u_3{\times}q^4$ b. $u_{25}=u_{11}{\times}q^{14}$

c. $u_3=u_8{\times}q^{-5}$ d. $u_{15}=u_{23}{\times}q^{-8}$

Correction 9

a. 9 termes.

b. 8 termes.

c. 16 termes.

d. 25 termes.

Correction 10

1. a. On a :

$$v_{n+1}=u_{n+1}+10=\frac{1}{2}u_n-5+10=\frac{1}{2}u_n+5$$
$$=\frac{1}{2}\left(u_n+10\right)=\frac{1}{2}v_n$$

b. La suite $\left(v_n\right)$ est géométrique puisque pour passer d'un terme à son successeur, il faut multiplier par un même nombre.

Le premier terme de la suite $\left(v_n\right)$ est :

$$v_0=u_0+10=8+10=18$$

c. Puisque $\left(v_n\right)$ est la suite géométrique de premier terme 18 et de raison $\frac{1}{2}$, on en déduit que le terme de rang n s'écrit :

$$v_n=v_0{\times}q^n=18{\cdot}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2. D'après la relation définissant le terme v_n en fonction de u_n, on obtient :

$$v_n=u_n+10$$
$$u_n=v_n-10$$
$$u_n=18{\cdot}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Correction 11

1. Voici les trois premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$:

- $u_0=4$
- $u_1=\frac{-u_0+6}{u_0-2}=\frac{-4+6}{4-2}=\frac{2}{2}=1$
- $u_2=\frac{-u_1+6}{u_1-2}=\frac{-1+6}{1-2}=-5$

2. a. Voici les trois premiers termes de la suite $\left(v_n\right)$:

- $v_0=\frac{u_0+2}{u_0-3}=\frac{4+2}{4-3}=\frac{6}{1}=6$
- $v_1=\frac{u_1+2}{u_1-3}=\frac{1+2}{1-3}=-\frac{3}{2}$
- $v_2=\frac{u_2+2}{u_2-3}=\frac{-5+2}{-5-3}=\frac{-3}{-8}=\frac{3}{8}$

b. Etudions le quotient de deux termes consécutifs de la suite $\left(v_n\right)$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\dfrac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-3}}{\dfrac{u_n+2}{u_n-3}}=\frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-3}{\times}\frac{u_n-3}{u_n+2}$$
$$=\frac{\dfrac{-u_n+6}{u_n-2}+2}{\dfrac{-u_n+6}{u_n-2}-3}{\times}\frac{u_n-3}{u_n+2}=\frac{\dfrac{-u_n+6}{u_n-2}+2}{\dfrac{-u_n+6}{u_n-2}-3}{\times}\frac{u_n-3}{u_n+2}$$
$$=\frac{\dfrac{-u_n+6}{u_n-2}+\dfrac{2u_n-4}{u_n-2}}{\dfrac{-u_n+6}{u_n-2}-\dfrac{3u_n-6}{u_n-2}}{\times}\frac{u_n-3}{u_n+2}$$
$$=\frac{\dfrac{-u_n+6+2u_n-4}{u_n-2}}{\dfrac{-u_n+6-3u_n+6}{u_n-2}}{\times}\frac{u_n-3}{u_n+2}=\frac{\dfrac{u_n+2}{u_n-2}}{\dfrac{-4u_n+12}{u_n-2}}{\times}\frac{u_n-3}{u_n+2}$$
$$=\frac{u_n+2}{u_n-2}{\times}\frac{u_n-2}{-4u_n+12}{\times}\frac{u_n-3}{u_n+2}$$
$$=-\frac{1}{4}{\times}\frac{u_n+2}{u_n-2}{\times}\frac{u_n-2}{u_n-3}{\times}\frac{u_n-3}{u_n+2}=-\frac{1}{4}$$

c. La suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de premier terme $u_0=6$ et de raison $-\frac{1}{4}$.

Son terme de rang n est donné par la formule explicite :

$$v_n=6{\times}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

3. a. On obtient la relation suivante :

$$v_n=\frac{u_n+2}{u_n-3}$$
$$v_n{\cdot}\left(u_n-3\right)=u_n+2$$
$$v_n{\cdot}u_n-v_n{\cdot}3=u_n+2$$
$$u_n{\cdot}\left(v_n-1\right)=2+3{\cdot}v_n$$
$$u_n=\frac{2+3{\cdot}v_n}{-1+v_n}$$

b. A l'aide la question 2. et 3. a., on déduit l'expression du terme de rang n de la suite (u_n) en fonction de n :

$$u_n = \frac{2+18\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{-1+6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n}$$

c. Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$, (u_n) tend vers -2 :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{2+18\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{-1+6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{2}{-1} = 2$$

Correction 12

1. Déterminons les trois premiers termes de chacune de ces suites :

- Pour $n=0$: $a_0 = 0{,}40$; $b_0 = 0{,}41$
- Pour $n=1$:
  - $a_1 = 0{,}6\cdot a_0 + 0{,}3\cdot b_0 = 0{,}6\times0{,}40 + 0{,}3\times0{,}41$
    $= 0{,}24 + 0{,}123 = 0{,}363$
  - $b_1 = 0{,}3\cdot a_0 + 0{,}6\cdot b_0 = 0{,}3\times0{,}40 + 0{,}6\times0{,}41$
    $= 0{,}12 + 0{,}246 = 0{,}366$
- Pour $n=2$:
  - $a_2 = 0{,}6\cdot a_1 + 0{,}3\cdot b_1 = 0{,}6\times0{,}363 + 0{,}3\times0{,}366$
    $= 0{,}2178 + 0{,}1098 = 0{,}3276$
  - $b_2 = 0{,}3\cdot a_1 + 0{,}6\cdot b_1 = 0{,}3\times0{,}363 + 0{,}6\times0{,}366$
    $= 0{,}1089 + 0{,}2196 = 0{,}3285$

2. a. En utilisant la définition de la suite (u_n), on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= (0{,}6\cdot a_n + 0{,}3\cdot b_n) + (0{,}3\cdot a_n + 0{,}6\cdot b_n) \\ &= 0{,}9\cdot a_n + 0{,}9\cdot b_n = 0{,}9\cdot(a_n + b_n) = 0{,}9\cdot u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 dont le premier terme a pour valeur :
$u_0 = a_0 + b_0 = 0{,}40 + 0{,}41 = 0{,}81$

b. En utilisant la définition de la suite (v_n), on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} \\ &= (0{,}3\cdot a_n + 0{,}6\cdot b_n) - (0{,}6\cdot a_n + 0{,}3\cdot b_n) \\ &= -0{,}3\cdot a_n + 0{,}3\cdot b_n = 0{,}3\cdot(-a_n + b_n) \\ &= 0{,}3\cdot(b_n - a_n) = 0{,}3\cdot v_n \end{aligned}$$

On déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,3 et dont le premier terme a pour valeur :
$v_0 = 0{,}41 - 0{,}40 = 0{,}01$