Suites - Révisions

Exercice 1

Déterminer les 5 premiers termes des suites suivantes :

a. $u_n = 2{\cdot}n^2 - n + 1$ b. $v_n = \dfrac{2{\cdot}n+1}{2-3{\cdot}n}$

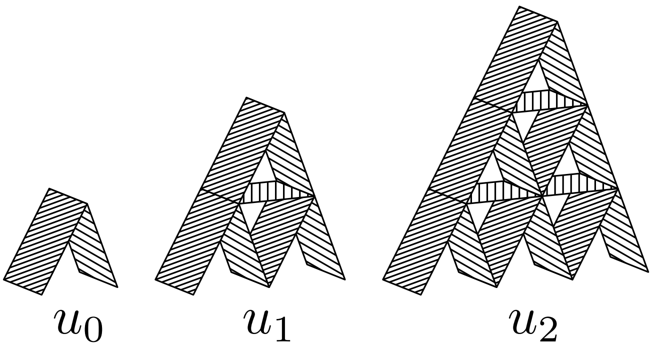
c. $w_n = \sqrt{3n+25}$ d. $x_n = 3{\cdot}\big[1+(-1)^n\big]+2$

Exercice 2

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :
   $u_n = 5 + 2\times n$ pour tout entier naturel n.
   a. Exprimer la valeur u_{n-3} en fonction de n.
   b. Donner la forme simplifiée de $u_{n-3}+u_3$.
   c. Donner la forme simplifiée de $u_{n-5}+u_5$.
   d. Soit k et n deux entiers tels que $k\leqslant n$. Montrer que u_k+u_{n-k} a sa valeur indépendante de k.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :
   $v_n = 2n^2 - 3n + 2$ pour tout entier naturel n.
   On souhaite étudier la différence entre deux termes consécutifs de la suite (v_n) :
   a. Donner l'expression du terme v_{n+1} en fonction de n.
   b. Etudier la valeur de $v_{n+1}-v_n$ en fonction de n.

Exercice 3

On considère la construction d'un château de cartes :



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignant le nombre de cartes utilisées dans la construction du château à l'étape n.

1. Déterminer les quatres premiers termes de la suite (u_n).
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une expression du terme u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et du rang n.
3. A quel étape de construction peut-on arriver avec deux jeux de 72 cartes ?

Exercice 4

Dans chaque cas, déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a. $u_n = \dfrac{2n^2+n+5}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

b. $u_0 = 2$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}{\cdot}u_n + 3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c. $u_0 = -1$; $u_{n+1} = u_n + n - 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

d. $u_0 = 2$; $u_1 = 3$; $u_{n+1} = u_n + 2{\cdot}u_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Exercice 5

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
   $u_n = -2n^2 - 3n + 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   Etudier la monotonie de chacune des suites ci-dessous, en étudiant la fonction f vérifiant la relation :
   $u_n = f(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
   $v_n = \dfrac{2n^2+1}{2n+5}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   On considère la fonction f définie par la relation :
   $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{2x+5}$
   a. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
   b. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression sur $\mathcal{D}_f$:
   $f'(x) = \dfrac{4x^2+20x-2}{(2x+5)^2}$
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   d. Justifier que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.
   e. Peut-on dire que la suite (v_n) est croissante sur $\mathbb{N}$?

Exercice 6

Dans cet exercice, on utilisera la méthode de la différence pour prouver la monotonie des suites :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
   $u_n = -32n + 102$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   Montrer que cette suite est décroissante.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
   $v_n = \sqrt{2n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
   Montrer que cette suite est croissante.
3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
   $w_n = 2n - \dfrac{25}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
   Montrer que la suite (w_n) est croissante.

Exercice 7

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Compléter les expressions suivantes :

a. $u_{12} = u_5 + \dots$ b. $u_{57} = u_{38} + \dots$

c. $u_3 = u_8 + \dots$ d. $u_{23} = u_{38} + \dots$

Exercice 8

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Compléter les expressions suivantes :

a. $u_7 = u_3\times\dots$ b. $u_{25} = u_{11}\times\dots$

c. $u_3 = u_8\times\dots$ d. $u_{15} = u_{23}\times\dots$

Exercice 9

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer le nombre de termes de chacune des sommes ci-dessous :

a. $u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+u_8$

b. $u_5+u_6+u_7+u_8+u_9+u_{10}+u_{11}+u_{12}$

c. $u_{11}+u_{12}+u_{13}+\ldots+u_{25}+u_{26}$

d. $u_8+u_9+u_{10}+\cdots+u_{31}+u_{32}$

Exercice 10

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$u_0=8$; $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n-5$ pour tout entier naturel n.

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
   $v_n=u_n+10$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a. Montrer que la suite (v_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n :
   $v_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot v_n$

   b. Donner la nature de la suite (v_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.

   c. Donner la formule explicite donnant l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.

2. Déduire des questions précédentes, la formule explicite de la suite (u_n).

Exercice 11

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie :

$u_0=4$; $u_{n+1}=\dfrac{-u_n+6}{u_n-2}$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).

2. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

   $v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n-3}$ pour tout entier naturel n.

   a. Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

   b. Montrer que : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=-\dfrac{1}{4}$

   c. En déduire la nature de la suite (v_n) ainsi que la formule explicite déterminant le terme de rang n en fonction de n.

3. a. Déterminer l'expression du terme u_n en fonction du terme v_n.

   b. En déduire la formule explicite définissant les termes de (u_n) en fonction de n.

Exercice 12

On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies conjointement par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = 0{,}40 \\ b_0 = 0{,}41 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}6a_n+0{,}3b_n \\ b_{n+1} = 0{,}3a_n+0{,}6b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Donner la valeur exacte des trois premiers termes de chacune des suites (a_n) et (b_n).

2. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :
   $u_n=a_n+b_n$; $v_n=b_n-a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9. On précisera également le premier terme.

   b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les èlèments caractéristiques.