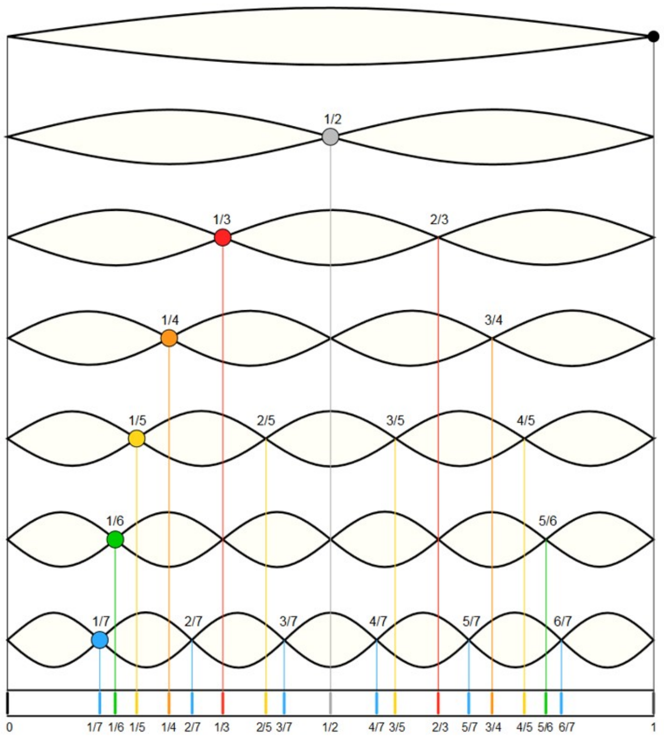
UNE SUITE PARTICULIÈRE : LA SÉRIE HARMONIQUE (COMPLÉMENTS)

MAIS EN QUOI EST-CE « HARMONIQUE » ?!

α ρ μ ο ν ι α

I. αρμονια

Vous savez sans doute que le réformateur religieux, mathématicien et philosophe[1] Pythagore vouait aux nombres et aux proportions un profond mysticisme. Avec son école, il aurait créé la première gamme de notes de musique[2].



« Harmonie » vient du latin *harmonia*, mot qui vient lui-même du grec αρμονια signifiant au sens propre *arrangement, ajustement, assemblage de plusieurs parties, juste rapport…*

Voyons pourquoi.

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ « s'introduit naturellement » en musique et les pythagoriciens l'avaient observé : en pinçant une corde sur sa moitié, au tiers, au quart… on obtient ***des notes « harmonieuses »***.

II. Un peu de culture avant de continuer : pourquoi Do ? Ré ? Mi ? Fa ? Sol ? La ? Si ?

Ce n'est que vers 1030 que sont apparus les noms des notes en lieu et place de la notation alphabétique, toujours en vigueur dans les pays de culture germanique ou anglo-saxonne (A pour la, B pour si, C pour do, D pour ré, E pour mi, F pour fa et G pour sol). Nous le devons (il semblerait) à un moine toscan, Guido d'Arezzo, et aux sept premiers vers d'un chant grégorien, hymne des Vêpres de l'office de Saint Jean Baptiste, écrite par le poète Paul Diacre.

UTqueant laxis
REsonare fibris
MIra gestorum
FAmuli tuorum
SOLve polluti
LAbii reaturn
Sancte Iohannes

Chaque vers commence sur un ton ou demi-ton plus haut que le précédent.

Traduction : « Pour que puissent résonner dans les cœurs détendus les merveilles de tes actions, absous l'erreur de la lèvre indigne de ton serviteur, saint Jean. »

Les premiers systèmes utilisés, dits hexacordes, ne comportaient que six notes.
Le "**SI**" (Initiales de la dernière ligne du poème **S**ancte **I**ohannes) n'est arrivé qu'au XVIème siècle grâce à Anselme De Flandres.

Le **Ut** étant difficile à chanter dans les exercices de solfège, car trop sourd, a été remplacé au XVIIème par "**Do**" qui est de meilleure sonorité (de Giovanni Battista **Do**ni, musicologue italien).

A noter :

La déformation de la lettre G a donné naissance à la clé de sol
En médiéval la gamme s'appelait **SOLFA**, d'où solfège.
Le mot **gamme** vient, lui, de G (gamma)

Autre traduction du chant : Pour qu'à gorge déployée/Tes serviteurs/Puissent chanter tes/Hauts faits, enlève/La souilleuse de/Leurs lèvres impures/Ô Saint-Jean.

Quant à ***la portée***, on affirme que c'est Guido d'Arezzo qui l'a inventée. Elle a mis plusieurs siècles à se former : d'abord constituée de trois lignes, puis quatre et enfin cinq.

1 Héraclide du Pont (340 av. J.-C.) attribue la création du mot « philosophe » à Pythagore (530 av. J.-C.), lequel ne se présentait pas comme un sage, mais comme « amoureux de la sagesse » (φιλόσοφος), ce qui donna le mot « philosophe ». On peut donc dire que « philosophie est amour de la sagesse ».

2 En fait, les Égyptiens utilisaient déjà une gamme de 7 notes qu'ils avaient associées aux 7 planètes.

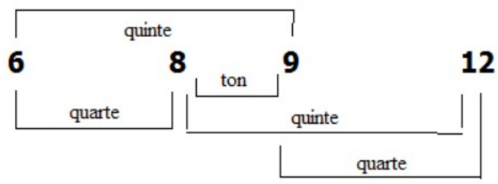
III. De la pratique à la théorie

III.1 Une histoire de forgeron

Suivant la légende, l'étincelle a jailli chez Pythagore six siècles avant Jésus-Christ.
Boèce (470-525) reprend dans son "De Institutione Musica" un récit[3] déjà rapporté par les Pré-Socratiques, Xénocrate, Macrobe, Jamblique, et par Nicomaque au IIème siècle :

> *Un certain Pythagore, grand philosophe, voyageait d'aventure ; on arriva à un atelier où l'on frappait sur une enclume à l'aide de cinq marteaux. Étonné de l'agréable harmonie ("concordiam") qu'ils produisaient[4], notre philosophe s'approcha et, croyant tout d'abord que la qualité du son et de l'harmonie résidait dans les différentes mains, il inter-changea les marteaux. Cela fait, chaque marteau conservait le son qui lui était propre. Après en avoir retiré un qui était dissonant, il pesa les autres et, chose admirable, par la grâce de Dieu, le premier pesait douze, le second neuf, le troisième huit, le quatrième six de je ne sais quelle unité de poids. Il connut ainsi que la science de la musique résidait dans la proportion et le rapport des nombres. Que dire de plus ? En mettant en ordre les notes d'après les intervalles dont on a parlé, l'illustre Pythagore fut le premier à mettre au point le monocorde[5]. […]*
> *D'abord il attacha à des cordes des poids correspondants et discerna à l'oreille leurs consonances ; puis il appliqua des proportions doubles, médianes ou autres à des longueurs de tuyaux et conçut une assurance parfaite dans ces diverses expériences. En les mesurant, il versa des quantités d'eau correspondantes en poids dans des verres ; et il percuta ces verres, arrangés selon les différents poids, avec un bâton de cuivre ou de fer, en se réjouissant de constater que, là non plus, rien ne divergeait. Ainsi conduit, il se tourna pour les examiner vers la longueur et l'épaisseur des cordes. C'est de cette façon qu'il trouva la règle ["regulam", au double sens de la norme et de l'instrument de mesure en bois qu'est le monocorde] ; […] ce type de règle donne une vision tellement fixe et ferme que nul, parmi ceux qui cherchent, ne peut être induit en erreur…*

Pythagore fait donc peser les marteaux et ceux-ci se trouvent être dans des rapports correspondants aux nombres 6, 8, 9, 12.



En frappant avec les marteaux 6 et 12, le même son (plus ou moins aigu) semble être entendu.
En frappant avec les marteaux 6 et 9, puis avec les marteaux 8 et 12, il semble que l'écart entre les sons est le même.
Etc.

Les rapports reconnus comme « harmonieux » par Pythagore sont :
$\frac{12}{6}=2$ (rapport d'octave), $\frac{8}{6}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ (rapport de quarte) et $\frac{9}{6}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ (rapport de quinte).

Rapport de ce qu'on appelle « un ton » ou « epogdoon[6]» (entre marteau 8 et 9) : $\frac{9}{8}$.

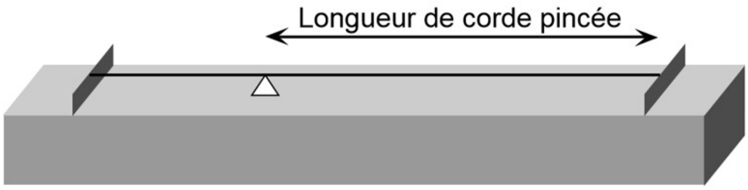
3 Tout au long de l'époque médiévale, ce récit fondateur sera repris maintes fois par les théoriciens de la musique et ses pédagogues, et abondamment illustré ; les allégories suscitées par ces textes foisonnent, placées sous le patronage des Arts Libéraux, programme d'enseignement hérité de la philosophie antique mais placé, cette fois, sous le signe de la foi chrétienne. Depuis la fin de l'Antiquité, les sept Arts Libéraux étaient répartis en deux groupes : le trivium – grammaire, dialectique et rhétorique – et le quadrivium où la musique figurait aux côtés des mathématiques, de la géométrie, de l'astronomie.

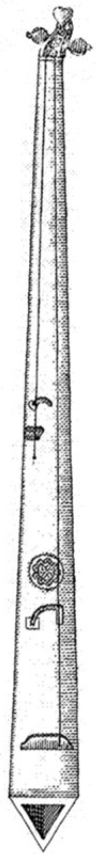
4 Par exemple, en frappant l'enclume avec un premier marteau, et un autre deux fois plus lourd, on obtenait le « même » son, plus ou moins grave. Certains sons étaient harmonieux, d'autres dissonants…

5 Instrument composé d'une corde en boyau montée sur deux taquets et d'un taquet mobile permettant de modifier la longueur de la corde en vibration.

6 Dans la théorie pythagoricienne de la musique, l'epogdoon (grec ancien : ἐπόγδοον) est l'intervalle ayant un ratio de 9 pour 8. Le mot est composé du préfixe *epi* (« sur le dessus de ») et *ogdoon* (« un huitième ») ; il signifie donc « un huitième en plus ». D'ailleurs, d'après Plutarque, ils haïssaient le nombre 17 parce qu'il séparait 16 de son epogdoon 18, et était donc un symbole de la Discorde.

Pythagore finit par donc par transposer tout ça sur un monocorde[7].





En pinçant une corde sur sa moitié (donc en la divisant en 2), il semble que la note soit plus ou moins haute (aiguë) mais que ce soit la même ! Diviser la corde par 2 revient à parler de rapport d'***octave*** (et donc multiplier par 2 ce qu'on appelle la fréquence).

En pinçant une corde au tiers (donc en la divisant par 3), il reconnaît le rapport de quinte.
Diviser la corde par 3 et faire vibrer les $\frac{2}{3}$ revient à parler de rapport de ***quinte***
(et donc multiplier par $\frac{3}{2}$ la fréquence).

De même, diviser la corde par 4 et faire vibrer les $\frac{3}{4}$ revient à parler de rapport de ***quarte***
(et donc multiplier par $\frac{4}{3}$ la fréquence).

Pour les pythagoriciens, le son produit en divisant par trois (quinte) semble très harmonieux avec la corde jouée à vide. Pour eux, ces deux sons soit dans un rapport « pur » et ce n'est pas un hasard : cela révèle ***la fabuleuse harmonie de l'univers***.

Il vont donc répéter ce procédé[8] (créer une note dans un rapport 4/3, puis recommencer…), s'intéresser aux intervalles consonants et créer des notes, par exemple en notant Fa la première :
Do, Sol, Ré, La, Mi, Si… et une dernière note qui ressemble fortement au Fa de départ, mais en plus aigu. On note donc également Fa cette dernière note*, et la boucle est bouclée.

<u>Pourquoi s'arrêter à 7 étapes</u> ? Eh bien c'est le plus petit cycle qui semble fonctionner « à peu près ». Voilà pourquoi les pythagoriciens s'arrêteront d'abord à ***7 notes***.

Le problème est que si on part d'un Do, on obtient : Sol, Ré, La, Mi, Si, presque un Fa, presque un Do…
Selon la note choisie au départ, la succession de quintes marche approximativement mais <u>les approximations ne sont pas toujours les mêmes</u> selon la corde (note) de départ, c'est un peu dérangeant.

* Petit détail sur la technique : en divisant une corde, j'obtiens un note plus aiguë.
Si cette note est beaucoup plus aiguë que la note de départ, on se rend compte qu'en lui enlevant une octave, c'est-à-dire en redivisant la corde par 2, on retrouve la même note plus grave…
Donc on se rend compte que plusieurs notes de hauteurs différentes peuvent porter le même nom.
Ça ne pose aucun problème puisqu'à l'oreille un Do grave et un Do aigu sonnent « pareils »…
On note donc « Do » tous les Do obtenus par octaves, mais on peut les différencier : Do_1, Do_2, Do_3 etc pour être plus clair.

7 Instrument d'apparence rudimentaire à l'unique corde pincée est en fait un "outil" de mesure. Le monocorde permettait d'enseigner la théorie des intervalles et de déterminer la justesse des notes. Il était ainsi utilisé pour accorder les tuyaux d'orgue et les cloches.
Nous sommes à peu près certain qu'il existait dès l'Antiquité, peut-être inventé par Pythagore (ou avant en Égypte?).
La table de l'instrument était graduée. Grâce à un chevalet que l'on déplaçait sur ces graduations, on pouvait obtenir les principaux intervalles.
La corde de l'instrument était généralement pincée. Mais on a pris l'habitude de la frotter avec un archet.

8 Voir III.2 La gamme pythagoricienne : une suite géométrique ?

III.2 La gamme pythagoricienne : une suite géométrique ?

Voyons le problème d'une façon plus moderne, en parlant de fréquences.
La ***fréquence*** d'un son est le nombre de vibration de l'air par seconde. On l'exprime en Hertz (Hz).

En fait, lorsqu'on divise la corde en deux, on multiplie la fréquence par 2 ; lorsqu'on la divise en trois, on multiplie la fréquence du son par 3 ; etc. Mais plus un son a une fréquence élevée, plus il est aigu.
Donc si une corde entière fait un son que l'on appelle **Fa** (fréquence f_0), en divisant par deux la corde on obtient la même note mais plus aiguë : la fréquence est $2f_0$.
Si une corde entière sonne en Fa, en divisant par trois on obtient un son aigu dont la fréquence est $3f_0$…

Plaçons-nous dans ce cas (division par trois, fréquence $3f_0$) : la note obtenue est trop aiguë par rapport à la note de départ, donc on ramène ce son le plus près du Fa initial en enlevant une octave (en divisant la fréquence par 2). C'est ainsi qu'apparaît « la quinte[9]» du Fa (notée Do) qui a une fréquence de $\frac{3f_0}{2}=\frac{3}{2}f_0$.

Puisque le Fa et le Do sont « harmonieux » selon les pythagoriciens, l'idée est émise de réitérer le même procédé. La gamme de Pythagore s'appuie uniquement sur une ***succession de quintes***.

Construire la gamme Pythagoricienne c'est donc construire la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{2}$, en ramenant si besoin les notées créées dans un intervalle d'une octave si besoin (voir page suivante).

On est parti du **Fa** pour créer le **Do**. On réitère donc le procédé : en partant du Do, on prend sa quinte (donc on a une fréquence de $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}f_0=\left(\frac{3}{2}\right)^2 f_0$), on la note **Sol**.
De même : **Ré**: $\left(\frac{3}{2}\right)^3 f_0$, **La**: $\left(\frac{3}{2}\right)^4 f_0$, **Mi**: $\left(\frac{3}{2}\right)^5 f_0$, **Si**: $\left(\frac{3}{2}\right)^6 f_0$.

Remarquons que $\left(\frac{3}{2}\right)^7=\frac{2\,187}{128}\approx 17$ et que $2^4=16$. Le $\widehat{\text{Fa}}$ créé en partant d'un Fa et en prenant 7 quintes successives n'est donc pas vraiment un Fa mais s'en rapproche (différence de fréquence de 6,8 % quand même !). On les confond donc et on crée le cycle : on a ***7 notes***.

Remarque : $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^7}{2^4}=\frac{2\,187}{128}\div 16=\frac{2\,187}{2\,048}$
donc entre le $\widehat{\text{Fa}}$ et le Fa, on « efface » un intervalle de $\frac{2\,187}{2\,048}$ (« un comma[10] »).

Voir schémas page suivante

---

9 Le mot « quinte » signifiant « écart de 5 notes » puisqu'on note la gamme Do Ré Mi Fa Sol La Si…
Diapason : les grecs appelaient « diapasôn » (διαπασῶν) l'octave, car dia signifie « par, en parcourant » et pasôn signifie « tous », et c'est tiré de l'expression diá pasōn khordōn symphōnía : « en parcourant toutes les cordes. En effet, les pythagoriciens jouaient certainement de la cithare ou de la lyre…
On comprend alors pourquoi les grecs nommaient « diapente » ce que l'on appelle aujourd'hui la quinte.
Remarque culturelle : La caisse de résonance de la "lyre" primitive était en effet formée d'une carapace de tortue sur laquelle on tendait une peau de bœuf ; les bras étaient primitivement des cornes de chèvre ou d'antilope. La traverse qui relie les deux bras était de chêne vert.
On confond souvent la lyre avec la cithare dont le son est moins grave. La cithare est en carapace de tortue, ses deux bras sont beaucoup plus massifs que ceux de la lyre et ne sont pas incurvés en forme de corne. La lyre est en bois. A la différence de celles de la harpe, toutes les cordes de la lyre ou de la cithare sont de longueur égale ; seule la différence de grosseur et de tension de la corde produit donc la différence des sons.

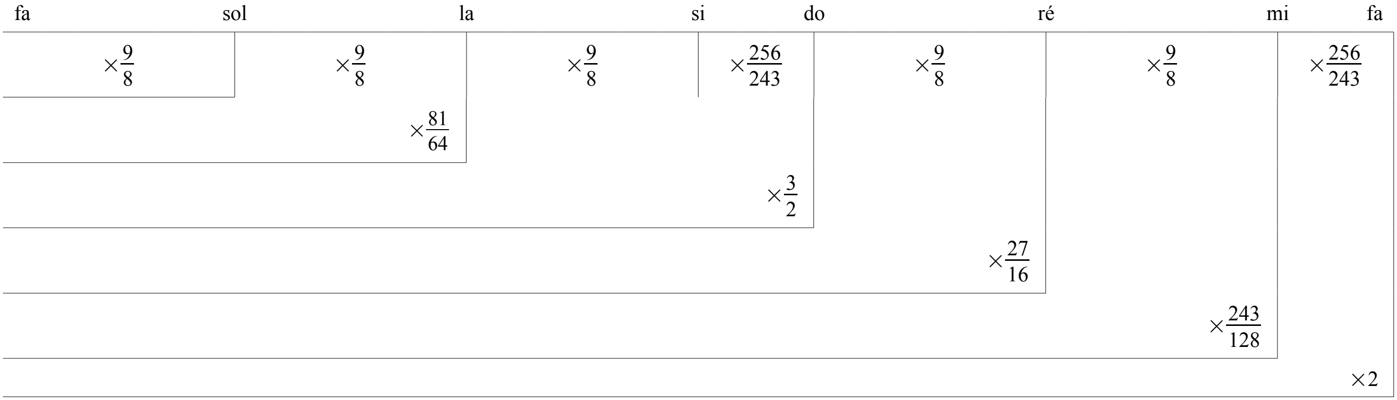
10 En anglais, « a comma » est *une virgule* (« point » est utilisé pour les nombres : « two point five »).
En grec κόμμα (komma), cela signifie *ce qui est coupé*.

Construction de la gamme pythagoricienne

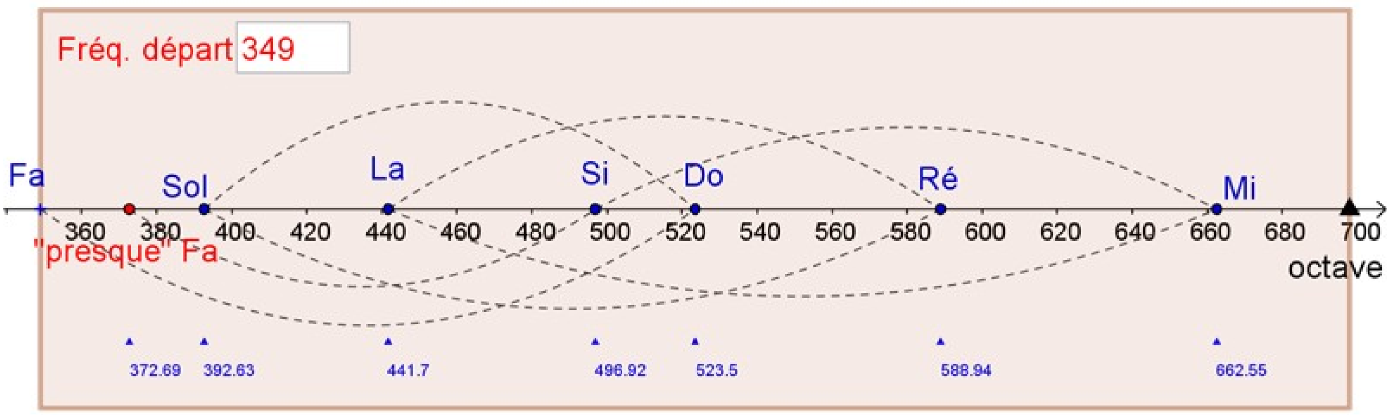
exemple	note 1 *fa*	note 2 *do*	note 3 *sol*	note 4 *ré*	note 5 *la*	note 6 *mi*	note 7 *si*
quintes	1/1	3/2	9/4	27/8	81/16	243/32	729/64
quintes ramenées à l'octave	1/1	3/2	9/8	27/16	81/64	243/128	729/512

exemple	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*	*ré*	*mi*
quintes ramenées à l'octave <u>triées</u>	1/1	9/8	81/64	729/512	3/2	27/16	243/128
rapport entre 2 notes		9/8	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8

ou avec un schéma :



Avec des fréquences, cela donne :

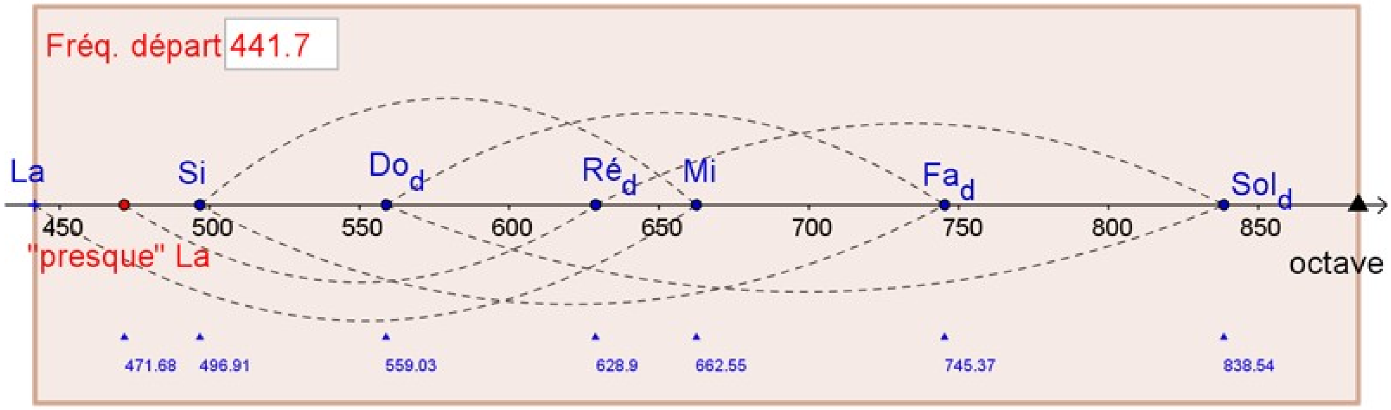


Triées : {349, 392.6, 441.7, 496.9, 523.5, 588.9, 662.6}

Signalons qu'avec cette gamme pythagoricienne ***un « demi-ton » n'est pas la moitié d'un « ton »***…
En effet, en appelant « ton » l'intervalle $\frac{9}{8}=1{,}125$ et en appelant « demi-ton » l'intervalle $\frac{256}{243} \approx 1{,}053$: deux demi-tons donnent l'intervalle $\left(\frac{256}{243}\right)^2 \approx 1{,}110$, ce qui ne forme pas un ton !

Un problème étant que si l'on veut reproduire ce schéma en partant par exemple de la note *La (441,7 Hz)* que l'on vient de créer, on ne va pas retomber sur des notes connues puisqu'on a fini par confondre la quinte du *Si* et le *Fa*…

Regardons ci-dessous : la quinte du *Si (441,7 Hz)* est une note de fréquence 745,37 Hz (372,69 Hz ramené à l'octave) alors que dans la construction précédente notre quinte du *Si* avait une fréquence arrondie à celle du *Fa* : 349 Hz.



Triées : {441.7, 496.9, 559, 628.9, 662.6, 745.4, 838.5}

Donc cette construction est « bonne » dans ses rapports : sur un instrument « qui part d'une note », ***toutes les quintes sont justes, sauf la dernière***.
Mais pour jouer un morceau et le transposer (jouer ce morceau sur un instrument donc la fondamentale est *La* au lieu de *Fa*), il faudrait parler de rapport de notes sur notre « partition » : nos notations *Fa, Sol, La, etc* ne seront d'aucune utilité ! Snif.
Et puis, surtout, si on veut jouer à plusieurs instruments, tous doivent avoir la même fondamentale…
Re-snif.

IV De la théorie à la pratique

IV.1 Harmonique mais peu pratique. Il manque des notes !

Pendant l'antiquité, les sept notes de la gamme pythagoricienne suffirent pour créer de la musique.
Mais ensuite cette gamme laissait « de trop grands trous » entre les notes pour les compositions de l'époque.

Les Grecs vont donc essayer de partager le ton (rapport 9/8).
N'ignorant pas que le ton majeur (Fa-Sol) ne peut, par des divisions rationnelles, se partager en deux parties égales[11], et leur devise étant « Tout est nombre (entier) », ils devaient le partager inégalement.

Plusieurs manières furent proposées. De l'une de ces divisions, inventée par Pythagore, ou plutôt par Philolaüs son disciple, résultait le *limma* et l'*apotome :* chaque intervalle 9/8 est divisé en deux rapports pour créer une note intermédiaire :

Apotome : rapport $\frac{2187}{2048} \approx 1{,}068$ (*apo* : mettre dehors ; *tome* : coupure => « coupé net »)

Limma : rapport $\frac{256}{243} \approx 1{,}053$.

Et on a bien $\frac{2\,187}{2\,048} \times \frac{256}{243} = \frac{9}{8}$. On a décomposé $\frac{9}{8}$ en deux parties « quasiment égales ».

Remarque : ce rapport $\frac{2187}{2048}$ était l'intervalle entre le $\widehat{\text{Fa}}$ et le Fa, que l'on avait volontairement omis dans le cycle de 7 notes précédent… Rien de très ingénieux donc : on continue le cycle jusqu'à 12 notes !
Diviser ainsi le 9/8 en deux intervalles revient à continuer le cycle de la construction à 7 notes…

On modifia[12] donc la gamme de Pythagore en procédant à un cycle de 12 quintes et non plus 7, la dernière note obtenue étant quasiment la note obtenue après 7 octaves : $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129{,}75$ et $2^7 = 128$ (soit une différence de 1,37 % cette fois !).

Les Grecs ne faisaient certainement pas ces calculs en pensant aux fréquences, mais certainement aux rapports de notes comme vu précédemment, ce qui revient au même.

On décida donc de rajouter ces 5 notes en les nommant avec un « dièse[13] pythagoricien » :

Do#, **Ré#**, **Fa#**, **Sol#**, **La#**.

Ce qui nous donne finalement la liste des quintes créées :

Fa, Do, Sol, Ré, La, Mi, Si, Fa#, Do#, Sol#, Ré#, La#

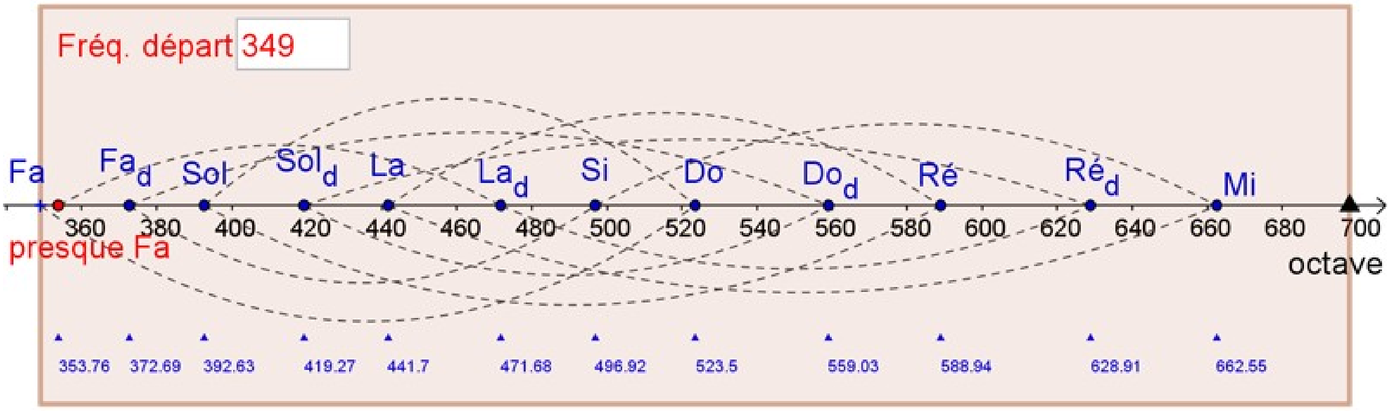
et on retombe sur presque un Fa que l'on assimile à un Fa pour fermer le cycle.

fa – fa#	fa# – sol	sol – sol#	sol# – la	la – la#	la# – si	si – do	do – do#	do# – ré	ré – ré#	ré# – mi	mi – fa
$\times\frac{2\,187}{2048}$	$\times\frac{256}{243}$	$\times\frac{2\,187}{2048}$	$\times\frac{256}{243}$	$\times\frac{2\,187}{2048}$	$\times\frac{256}{243}$	$\times\frac{256}{243}$	$\times\frac{2\,187}{2048}$	$\times\frac{256}{243}$	$\times\frac{2\,187}{2048}$	$\times\frac{256}{243}$	$\times\frac{256}{243}$
apotome	*limma*	*apotome*	*limma*	*apotome*	*limma*	*limma*	*apotome*	*limma*	*apotome*	*limma*	*limma*
	$\times\frac{9}{8}$										
			$\times\frac{81}{64} \approx 1{,}2656$								
						$\times\frac{3}{2}$					
								$\times\frac{27}{16}$			
										$\times\frac{243}{128} \approx 1{,}8984$	
											$\times 2$

11 En effet $\sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$ n'est pas un rationnel !

12 Je vous rappelle que la gamme de Pythagore est construite sur un cycle de 7 quintes, la dernière note obtenue en partant d'un Do n'étant pas vraiment un Do « acoustiquement » parlant (différence de 6,8 %).

13 *δίεσις (diesis)* signifiant demi-ton en grec/latin



Triées : {349, 372.7, 392.6, 419.3, 441.7, 471.7, 496.9, 523.5, 559, 588.9, 628.9, 662.6}

Les remarques sur la transposition restent les mêmes, sauf que l'approximation étant meilleure, le problème est « amoindri ». Rappelons quand même que ***toutes les quintes sont justes, sauf la dernière***.

En divisant la corde par 5 (et en ramenant à l'octave), on obtient ce qu'on appelle une ***tierce majeure*** (dont la rapport est 5/4, soit 1,25), dont nous reparlerons pour la gamme de Zarlino (page suivante).
Il s'avère que ***dans la gamme pythagoricienne, toutes les tierces majeures sont… fausses***.

Apotome A : *1,06787109* (= 2187/2048)
Limma L : *1,05349794* (= 256/243)

Justesse des quintes et des tierces majeures
dans la gamme de Pythagore à 12 notes

A	L	A	L	A	L	L	A	L	A	L	L
1,06787109	1,05349794	1,06787109	1,05349794	1,06787109	1,05349794	1,05349794	1,06787109	1,05349794	1,06787109	1,05349794	1,05349794

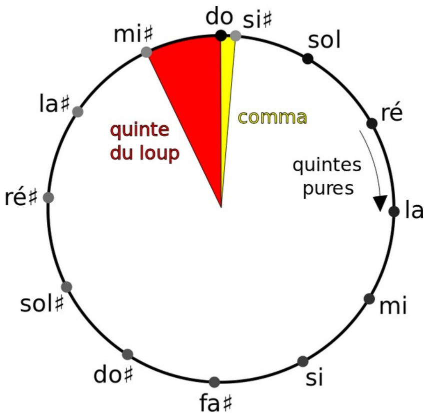
QUINTES

Suite (7 demi-tons)	ALALALL	LALALLA	ALALLAL	LALLALA	ALLALAL	LLALALL	LALALLA	ALALLAL	LALLALA	ALLALAL	LLALALA	LALALAL
Calcul	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	**1,47981055**	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
Nb A et nb L	3 et 4	3 et 4	3 et 4	3 et 4	3 et 4	**2 et 5**	3 et 4	3 et 4	3 et 4	3 et 4	3 et 4	3 et 4

TIERCES MAJ

Suite (4 demi-tons)	ALAL	LALA	ALAL	LALL	ALLA	LLAL	LALA	ALAL	LALL	ALLA	LLAL	LALA
Calcul	1,265625	1,265625	1,265625	1,24859015	1,265625	1,24859015	1,265625	1,265625	1,24859015	1,265625	1,24859015	1,265625
Nb A et nb L	2 et 2	2 et 2	2 et 2	1 et 3	2 et 2	**1 et 3**	2 et 2	2 et 2	1 et 3	2 et 2	1 et 3	2 et 2

IV.2 La quinte du loup et le comma



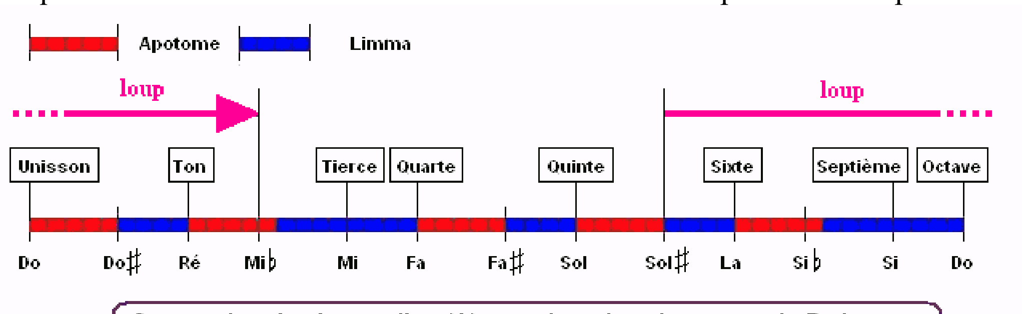
Ici, en partant d'un Do, la dernière quinte est la quinte de Mi#.

En la confondant avec un Do, on fait une erreur qui s'entend : c'est la quinte du loup.

Sur l'exemple précédent (fondamentale : Fa), c'est la quinte La# – Fa.

Le cycle des quintes (qu'il soit de 7 ou de 12) ne se referme pas, il subsiste un "***comma pythagoricien***", différence entre 7 octaves et 12 quintes. C'est donc un rapport de $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \div 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531\,441}{524\,288} \approx 1{,}0136$ pour 12 quintes, ce qui est mieux que le rapport du cycle à 7 quintes (l'apotome) : $\frac{2\,187}{2\,048} \approx 1{,}068$.

Cela forme ***la quinte dite « du loup »*** car elle est très dissonante (elle « hurle »).
Comme déjà expliqué, cette quinte rend difficile la transposition : on ne peut pas modifier d'un même intervalle la fréquence de toutes les notes d'une œuvre musicale pour la transposer dans une tonalité différente !



Succession des intervalles élémentaires dans la gamme de Pythagore

Dans la pratique, les musiciens qui préfèrent utiliser des octaves pures accordent leurs instruments sur une gamme pythagoricienne ***en reportant la quinte du loup dans un intervalle peu utilisé***, comme par exemple sol♯ – mi ♭[14]. Les intervalles englobant la quinte du loup sonneront faux aussi, il faut donc soigneusement l'éviter.

14 En intervertissant les divisions d'intervalles (l'apotome et le limma), on peut définir ce qu'est un bémol au sens de Pythagore, et qui est différent d'un dièse ! Pour passer d'un Fa à un Fa#, on multiplie par un apotome ; pour passer d'un Fa à un Sol*b*, on multiplie par un limma. L'écart entre un dièse et un bémol est donc $\frac{apotome}{limma}$, c'est-à-dire… un comma pythagoricien !

IV.3 Gamme de Zarlino (1517-1590) : bienvenue la tierce

IV.3.1 Présentation

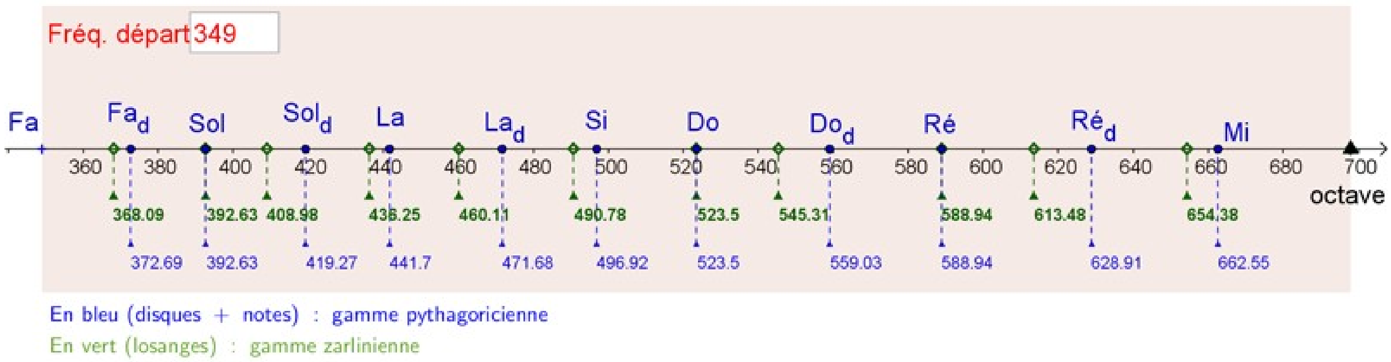
Au bas Moyen Âge on commence à considérer comme consonant l'intervalle de tierce (majeur) comme Do – Mi, et non plus seulement les octaves et les quintes. Zarlino fut le premier à reconnaître l'importance de la tierce majeure comme intervalle fondateur de l'harmonie : l'octave, la tierce (majeure, rapport 5/4 en divisant la corde par 5 et en ramenant à 2 octaves) et la quinte sonnent bien à l'oreille lorsqu'ils sont joués ensemble[15] ! C'est la création d'une nouvelle gamme fondée sur l'octave, la tierce et la quinte.

C'est ce qu'on appelle la ***gamme de Zarlino***.

fa – sol	sol – la	la – si	si – do	do – ré	ré – mi	mi – fa
$\times\frac{9}{8}$	$\times\frac{10}{9}$	$\times\frac{9}{8}$	$\times\frac{16}{15}$	$\times\frac{9}{8}$	$\times\frac{10}{9}$	$\times\frac{16}{15}$

Trois types d'écarts (seulement 2 pour Pythagore !) : un écart de 9/8 qu'il appelle « ton majeur », un écart de 10/9, le « ton mineur », et un écart de 16/15, le « demi-ton majeur ». C'est peu commode.

fa – fa#	fa# – sol	sol – sol#	sol# – la	la – la#	la# – si	si – do	do – do#	do# – ré	ré – ré#	ré# – mi	mi – fa
$\times\frac{135}{128}$	$\times\frac{16}{15}$	$\times\frac{25}{24}$	$\times\frac{16}{15}$	$\times\frac{135}{128}$	$\times\frac{16}{15}$	$\times\frac{16}{15}$	$\times\frac{25}{24}$	$\times\frac{27}{25}$	$\times\frac{25}{24}$	$\times\frac{16}{15}$	$\times\frac{16}{15}$
	$\times\frac{9}{8}$		$\times\frac{10}{9}$		$\times\frac{9}{8}$	$\times\frac{16}{15}$		$\times\frac{9}{8}$		$\times\frac{10}{9}$	$\times\frac{16}{15}$
			(tierce majeure juste !) $\times\frac{5}{4}=1{,}25$								
						$\times\frac{3}{2}$					
								$\times\frac{27}{16}$			
										$\times\frac{15}{8}=1{,}875$	
											$\times 2$



Finalement, ***Pythagore avait des quintes justes*** (sauf celle du loup) ***mais des tierces approximatives***.
Zarlino réussit à avoir des tierces et des quintes souvent *(mais pas toujours)* ***justes…***
… mais a aussi réparti le comma pythagoricien qui se retrouve dans toute la gamme !
Comme le montre le tableau ci-dessous, les quintes de la gamme de Zarlino ne sont pas toutes justes.
Ou par exemple, en utilisant le tableau ci-dessus, la quinte Ré-La :

$$\frac{la}{ré}=\frac{10}{9}\times\frac{16}{15}\times\frac{9}{8}\times\frac{10}{9}=\frac{40}{27}\approx 1{,}4815<1{,}5 \ .$$

La quinte de Zarlino est (quasiment exactement) autant approximative que la tierce de Pythagore ne l'était…

15 Voir pourquoi au V.1 Un son « pur » c'est moche ? : ce sont des harmoniques !

A	1,0546875
B	1,06666667
C	1,04166667
D	1,08

Justesse des quintes et des tierces majeures

dans la gamme de Pythagore à 12 notes

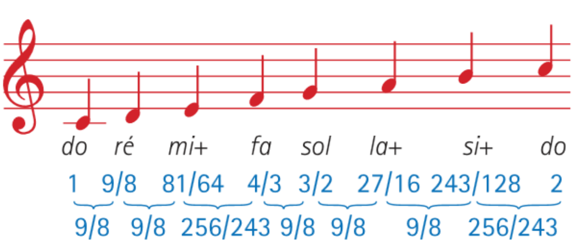
Avec dièses :	A	B	C	B	A	B	B	C	D	C	B	B
	1,0546875	1,06666667	1,04166667	1,06666667	1,0546875	1,06666667	1,06666667	1,04166667	1,08	1,04166667	1,06666667	1,06666667

QUINTES												
Suite (7 demi-tons)	ABCBABB	BCBABBC	CBABBCD	BABBCDC	ABBCDCB	BBCDCBB	BCDCBBA	CDCBBAB	DCBBABC	CBBABCB	BBABCBA	BABCBAB
Calcul	1,5	**1,48148148**	1,5	1,5	1,5	**1,51703704**	1,5	1,5	1,5	**1,48148148**	1,5	1,5

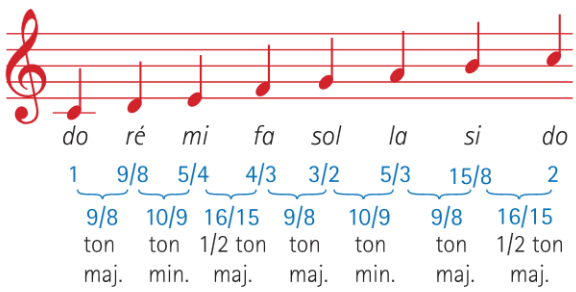
TIERCES MAJ												
Suite (4 demi-tons)	ABCB	BCBA	CBAB	BABB	ABBC	BBCD	BCDC	CDCB	DCBB	CBBA	BBAB	BABC
Calcul	1,25	1,25	1,25	**1,28**	1,25	**1,28**	1,25	1,25	**1,28**	1,25	**1,28**	1,25

Notons que Zarlino n'a donc ***plus ici de problème de comma pythagoricien*** : sa construction n'utilise pas les quintes. Mais il subsiste un intervalle entre les quintes fausses de Zarlino et la quinte « juste », donc un dont on parle particulièrement : le ***comma syntonique***[16] (ou *zarlinien*) pour l'erreur $\frac{40}{27} \div \frac{3}{2} = \frac{81}{80} = 1{,}0125$. On parle donc aussi de « comma 81/80 ».

Remarque : il s'avère que c'est aussi l'intervalle entre une tierce pythagoricienne (81/64) et une tierce « juste » (5/4) : $\frac{81}{64} \div \frac{5}{4} = \frac{81}{80}$. Pour écouter ce comma, voir IV.6.2 Comma syntonique.



Rapports dans la gamme de Pythagore



Rapports dans la gamme de Zarlino

Cependant, les gammes de Pythagore et de Zarlino sont des gammes divisées en intervalles inégaux.
La gamme de Zarlino a beau effacer le problème de la quinte du loup posé par la gamme pythagoricienne elle n'est pas la "solution miracle" et subsistent des problèmes majeurs dans la théorie musicale : ses tons ne sont pas égaux, il est donc encore plus dur de faire une transposition (adapter une partition à un autre instrument qui n'est pas dans la même tonalité). Et les tierces sont parfois peu justes.

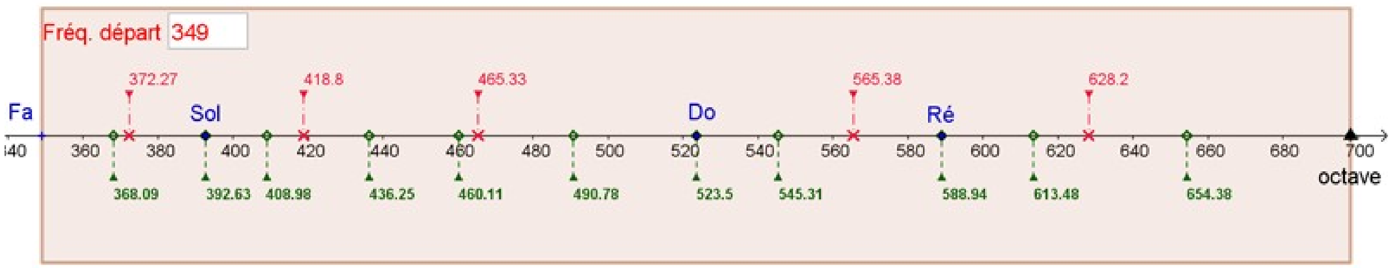
Il reste difficile de réaliser un instrument permettant de jouer dans toutes les tonalités, encore et toujours du fait des écarts distincts entre les petits et les grands tons…
Cela va induire la naissance d'une gamme plus simple à utiliser, car la polyphonie (plusieurs instruments) se démocratise et il est nécessaire de pouvoir transposer !

16 Du grec ancien σύντονος, *suntonos* (« qui résonne en accord, qui est d'accord avec », donc en harmonie)

Remarque :
en intervertissant les divisions d'intervalles, on peut définir ce qu'est un ***bémol*** au sens de Zarlino, et qui est bien différent d'un *dièse* !

fa solb sol lab la sib si do réb ré mib mi fa

<table>
<tr><td>$\times\frac{16}{15}$</td><td>$\times\frac{135}{128}$</td><td>$\times\frac{16}{15}$</td><td>$\times\frac{25}{24}$</td><td>$\times\frac{16}{15}$</td><td>$\times\frac{135}{128}$</td><td>$\times\frac{16}{15}$</td><td>$\times\frac{27}{25}$</td><td>$\times\frac{25}{24}$</td><td>$\times\frac{16}{15}$</td><td>$\times\frac{25}{24}$</td><td>$\times\frac{16}{15}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\times\frac{9}{8}$</td><td colspan="2">$\times\frac{10}{9}$</td><td colspan="2">$\times\frac{9}{8}$</td><td>$\times\frac{16}{15}$</td><td colspan="2">$\times\frac{9}{8}$</td><td colspan="2">$\times\frac{10}{9}$</td><td>$\times\frac{16}{15}$</td></tr>
</table>



En vert (losanges) : gamme zarlinienne
En rouge (croix) : bémols de la gamme zarlinienne

Avec bémols :	B	A	B	C	B	A	B	D	C	B	C	B
	1,06666667	1,0546875	1,06666667	1,04166667	1,06666667	1,0546875	1,06666667	1,08	1,04166667	1,06666667	1,04166667	1,06666667

QUINTES

Suite (7 demi-tons)	BABCBAB	ABCBABD	BCBABDC	CBABDCB	BABDCBC	ABDCBCB	BDCBCBB	DCBCBBA	CBCBBAB	BCBBABC	CBBABCB	BBABCBA
Calcul	1,5	**1,51875**	1,5	1,5	1,5	1,5	**1,51703704**	1,5	**1,48148148**	**1,48148148**	**1,48148148**	1,5

TIERCES MAJ

Suite (4 demi-tons)	BABC	ABCB	BCBA	CBAB	BABD	ABDC	BDCB	DCBC	CBCB	BCBB	CBBA	BBAB
Calcul	1,25	1,25	1,25	1,25	**1,296**	**1,265625**	**1,28**	1,25	**1,2345679**	**1,26419753**	1,25	**1,28**

Ainsi, avec ce système, on a par exemple : si*b* $\neq$ la#.

IV.3.2 Idée de construction de Zarlino

Gioseffo Zarlino (1517–1590) élabore une des multiples gammes naturelles possibles en reconnaissant une place importante à l'intervalle de tierce « pure ».
En travaillant, il calcule des intervalles et c'est un système purement spéculatif et abstrait qu'il produit.
Il propose pour la division des intervalles simples non pas une approche fondée sur les harmoniques[17], mais une construction numérologique par divisions successives.

L'***octave***, rapport 2:1, est divisée par la ***quinte*** (Do-Sol) et la ***quarte*** (Sol-Do), qui sont dans des rapports 4:3:2, c'est-à-dire que :

$\frac{2}{1}=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}$: l'octave ($\frac{2}{1}$) se trouve à une quarte ($\frac{4}{3}$) de la quinte ($\frac{3}{2}$).

De même, la quinte (Do-Sol), rapport 3:2, doit pouvoir être divisée par la ***tierce majeure*** (Do-Mi) et la ***tierce mineure*** (Mi-Sol), suivant les rapports 6:5:4 :

$\frac{3}{2}=\frac{6}{5}\times\frac{5}{4}$: la quinte se trouve à une tierce majeure de la tierce mineure.

Et la tierce majeure (Do-Mi), rapport 5:4, se divise elle-même entre le ***ton majeur*** (Do-Ré) et le ***ton mineur*** (Ré-Mi), suivant les rapports 10:9:8 :

$\frac{5}{4}=\frac{10}{9}\times\frac{9}{8}$, la tierce majeure se trouve à un ton majeur d'un ton mineur…

La gamme naturelle se construit en particulier de ***trois accords parfaits*** à distance de quinte juste :

Fa–La–Do | Do–Mi–Sol | Sol–Si–Ré.

Mais en partant d'une autre note que le Do, les accords ne seront plus aussi parfaits…

C'est une construction essentiellement théorique, qui a sans doute joué un rôle dans l'établissement des fonctions harmoniques (les accords ci-dessus forment la sous-dominante, la tonique et la dominante de Do majeur), mais qui est ***peu utilisable en pratique parce que les accords autres que ceux qui ont servi à sa construction ne sont pas justes***.

17 Contrairement à ce qu'on lit beaucoup sur internet

IV.4 Ça suffit maintenant. Werckmeister et Bach tempèrent les ardeurs !

IV.4.1 Problème mathématique impossible ? Tous dans le comma !

De nombreux artistes et théoriciens de la musique ont essayé de créer des gammes qui minimiseraient les problèmes de la gamme pythagoricienne ou de la gamme de Zarlino.

Il faudrait pour cela diviser une octave en 12, mais cela reviendrait à résoudre $x^{12}=2$, et cette équation n'admet pas de solution rationnelle. Il faut donc à tout prix ***répartir le comma*** (pythagoricien ou zarlinien).

Weirckmeister (1645-1706) par exemple publia en 1697 des gammes diminuant au maximum la différence d'écart entre les notes sans la supprimer dans le but de conserver la particularité de chaque ton.
On peut également citer Chaumont (1695), ***Rameau*** (1726), D'Alembert (1752), Corrette (1753), Marpourg (1756) etc. Et ***Bach*** !

En 1722, Bach achève le premier livre du *Clavier bien tempéré*[18], une œuvre proposant dans chaque livre (il y en a deux) 12 préludes et 12 fugues, correspondant aux 12 demi-tons de la gamme chromatique.
C'est la première transposition de l'Histoire.

La même année, Rameau donne la méthode dans son *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels* tandis que Bach donnait plutôt la mise en pratique de cette gamme dite tempérée.
Quelques années plus tard, elle s'imposera à l'ensemble de la musique européenne, par sa simplicité.

La transposition entraînait ***un changement de sonorité*** des notes dû aux intervalles inégaux et ***obligeait donc à changer d'instrument***. ***La transposition est donc bien plus simple avec la gamme tempérée***.
Par exemple : Si l'on joue do, ré, mi, do et que l'on souhaite transposer au ton supérieur il suffit d'ajouter un ton à chacune de ces notes. Les do deviennent donc des ré, le ré devient un mi, et le mi devient un fa#.

IV.4.2 La gamme des mathématiciens fait fuir le loup

Bach finit donc par démocratiser une gamme qui découpe l'octave en douze intervalles ***quasi-égaux***.
Mais en fait c'était juste des mathématiques…

En réalité, l'idée de départ de la gamme tempérée, c'était de reprendre le même nombre (12) de notes que les gammes précédentes mais plutôt que de déterminer leur hauteur en prenant une note de départ et partir de celle-ci en ajoutant un intervalle choisi (exemple : la gamme de Pythagore utilise la quinte), la nouvelle gamme prends une octave et la découpe en douze intervalles égaux.

La « ***vraie gamme tempérée***[19]» (notons-la GTT pour Gamme Tempérée Théorique), c'est un mathématicien qui la décrira. Mathématiquement, Simon Stevin (1548-1620) est l'auteur[20] de la division de la gamme tempérée en douze demi-tons vraiment égaux, telle que nous la connaissons aujourd'hui. Il expose sa façon de construire la gamme tempérée dans son ouvrage *Sur la théorie de l'art de chanter*, qui restera un manuscrit jusqu'à sa parution à Amsterdam en 1884 !

La GTT est construite en divisant l'octave en 12 intervalles égaux (appelés demi-tons) notés *k* tels que :

$$k^{12}=2 \text{ donc } \boxed{\boldsymbol{k=2^{1/12}}}.$$

Par exemple, la quinte tempérée égale 7 demi-tons, soit $2^{7/12}$ ($\approx 1{,}498307$), soit un écart de 0,11 % environ par rapport à la quinte juste qui est de 1,5.

Construire la gamme tempérée c'est donc construire la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $2^{1/12}$, en ramenant les notées créées dans un intervalle d'une octave si besoin.

---

18 Remarque : J.S. Bach a intitulé "Le clavier bien tempéré" mais "***bien*** tempéré" ne signifie pas "***également*** tempéré". On sait qu'il accordait lui-même ses instruments, mais on ignore quel était exactement le tempérament qu'il utilisait…

19 Le terme « gamme tempérée » est ici une appellation contestable, car les gammes des tempéraments inégaux de Bach et compagnie sont toutes des gammes tempérées… On devrait dire « gamme au tempérament égal ».

20 Le premier connu en tout cas

Remarque : on peut aussi considérer que ***le comma pythagoricien est réparti selon douze parts égales entre les douze quintes du cycle***. Le comma pythagoricien vaut $\frac{3^{12}}{2^{19}}$: le douzième de comma vaut donc $\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^{1/12}$ ou $\frac{3}{2^{19/12}}$. La quinte tempérée (quinte pure diminuée d'un douzième de comma) vaut donc $\frac{3}{2} \div \frac{3}{2^{19/12}}$ soit $2^{7/12} \approx 1{,}498307$, soit un écart de 0,11 % environ par rapport à la quinte juste.

La gamme tempérée permet les modulations à l'infini – c'est d'ailleurs la raison de son adoption générale… ***mais à part les octaves, tous les intervalles sont « purement parlant » légèrement faux !***

- les quintes sont relativement justes (quinte pure diminuée d'un douzième de comma pythagoricien) ;
- les quartes sont légèrement trop grandes (même raison) ;
- les tierces sont meilleures que les tierces pythagoriciennes (réduites d'un tiers de comma pythagoricien) mais encore éloignées de la pureté : $\frac{5}{4} \div \frac{3^4}{2^{19/3}} \approx 1{,}2444$ soit un écart de 0,45 %.

Jouer en gamme tempérée c'est donc bien, mais c'est jouer faux. =D

Mais d'ailleurs, ***comment fait un accordeur de piano***[21] ? Parce que mathématiquement c'est beau, mais en pratique la gamme tempérée est difficile à accorder (ce qui explique en partie son application tardive) : pour réaliser le tempérament égal, il faut établir des dissonances toutes égales à l'intérieur d'une octave !

IV.5 Comparaison des fréquences : Zarlino, Pythagore ou tempérament égal, qui est le meilleur ?

Fréquences en Hz

Notes	Gamme de Pythagore	Gamme de Zarlino	Gamme tempérée
Do4	521,5	528	523,3
Si3	495	495	493,9
Si3 ♭	463,6	475,2	466,2
La3 #	469,9	464,1	466,2
La3	**440**	**440**	**440**
La3 ♭	412	422,4	415,3
Sol3 #	417,7	412,5	415,3
Sol3	391,1	396	392
Sol3 ♭	366,3	375,5	370
Fa3 #	371,3	371,3	370
Fa3	347,7	352	349,2
Mi3	330	330	329,6
Mi3 ♭	309	316,8	311,1
Ré3#	313,2	309,4	311,1
Ré3	293,3	297	293,7
Ré3 ♭	274,7	281,6	277,2
Do3#	278,4	275	277,2
Do3	260,7	264	261,6

Intervalles importants dans 3 systèmes

Intervalle	Gamme de Zarlino	Gamme de Pythagore	Gamme tempérée
Quinte *do-sol*	1,500	1,500	1,498
Loup *sol♯-mi♭*	1,536	1,480	1,498
Tierce majeure *do-mi*	1,250	1,266	1,260

En général :

- dans la gamme de Pythagore : tierces majeures toujours légèrement fausses, quintes toujours justes sauf la quinte du loup qui est légèrement fausse.

- dans la gamme de Zarlino : quintes et tierces majeures souvent justes, la « quinte du loup sol#-mi*b* » est horriblement fausse.

- dans la gamme tempérée, il n'y a pas de quinte du loup ; les quintes sont bonnes, et les tierces légèrement fausses.

	Tierces majeures	*Quintes*	*Quinte du loup*
G. de Pythagore	Tjrs un peu fausse	Tjrs justes, sauf celle du loup	Un peu fausse
G. de Zarlino	Souvent justes	Souvent justes	Horrible
G. tempérée	Un peu fausses	Tjrs fausses mais bonnes	Aucune

Gamme \Note	*do*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
Pythagoricienne	1,000	1,125	1,266	1,333	1,500	1,687	1,898	2,000
Zarlinienne	1,000	1,125	1,250	1,333	1,500	1,667	1,875	2,000
Tempérée	1,000	1,122	1,260	1,335	1,498	1,682	1,888	2,000

21 Il prend une note de base qu'il accorde arbitrairement (généralement le la 440), puis il accorde toutes les octaves correspondantes (certainement en utilisant les battements, voir V.3.3 Un battement, ça s'entend ?). Ensuite, il choisit une quinte à partir de la première note, mettons mi, il accorde un mi comme une quinte juste à partir d'un la, puis il accorde tous les autres mi à l'octave. Puis il prend une quinte à partir du mi et recommence…
Ainsi sur le clavier vont se trouver accordées les notes suivant une suite de quintes. Le malheur arrive au bout de douze quintes : si l'accordeur a vraiment accordé les quintes de façon juste, il ne pourra pas refermer le cercle des quintes ! Il doit donc accorder les quintes un tout petit peu en dessous de la quinte juste (précisément un douzième d'enharmonie, ce qui est inaudible), afin de retomber sur ses pieds au bout du cycle.

IV.6 A l'écoute, on entend la différence ?!

IV.6.1 Gammes tempérée, pythagoricienne, zarlinienne

Je vous laisse juge…

Trois gammes majeures :
- tempérée : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/gamtemp.wav
- Pythagore : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/gampyth.wav
- Zarlino : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/gamzarl.wav

Arpèges majeurs :
- tempérée : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/arptemp.wav
- Pythagore : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/arppyth.wav
- Zarlino : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/arpzarl.wav

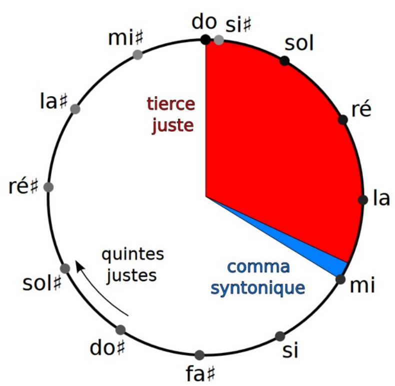
Accords majeurs :
- tempérée : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/acctemp.wav
- Pythagore : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/accpyth.wav
- Zarlino : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/acczarl.wav

Autre exemple avec des accords :
- le premier comprend n1 à 440 Hz avec n3 à 550 Hz et n5 à 660 Hz.
  C'est donc un la majeur naturel : http://didierdescamps.free.fr/solfege/la_maj_nat.wav
- le deuxième comprend n1 à 440 Hz avec n3 à 554 Hz et n5 à 657 Hz.
  C'est donc un la majeur tempéré, avec des fréquences arrondies à l'entier le plus proche, logiciel oblige : http://didierdescamps.free.fr/solfege/la_maj_temp.wav

Malgré la piètre qualité des échantillons, la différence est perceptible…

IV.6.2 Comma syntonique

On a vu que la gamme de Pythagore est exclusivement basée sur des quintes pures (de rapport 3/2) et ne tient pas compte de la tierce pure de rapport 5/4. Par comparaison, la tierce pythagoricienne a un rapport de 81/64 : la différence ($\frac{81}{64} \div \frac{5}{4} = \frac{81}{80}$) est le ***comma syntonique***, autrement dit la différence entre une tierce majeure « pure » et une tierce majeure pythagoricienne.



Ce comma 81/80, s'entend-il ? Il est ici : http://didierdescamps.free.fr/solfege/comma.wav

IV.6.3 Savart

Le ***savart*** est l'intervalle considéré comme le plus petit qu'une oreille entraînée puisse percevoir dans de bonnes conditions. C'est la 301ème partie de l'octave (301 pour des raisons numérico-historiques : $1000 \log_{10}(2) \approx 301{,}03$). Il y a donc environ 5,4 savarts dans un comma, et à peu près 25 dans un demi-ton tempéré. L'entendez-vous encore ? : http://didierdescamps.free.fr/solfege/savart.wav

IV.7 Remarques pratiques : qui prend quelle gamme alors ?

Les violonistes, altistes, violoncellistes les chanteurs, n'étant pas contraints de jouer des sons fixes, ont souvent recours spontanément, dans un passage mélodique, aux intervalles de la gamme de Pythagore.

Les choristes interprétant une musique polyphonique tonale et consonante (musique religieuse de la Renaissance par exemple), ont tendance à réaliser les accords parfaits de la gamme de Zarlino.

Les instruments à sons fixes modernes (instruments à clavier, instruments à vent, guitare) sont accordés suivant le tempérament égal, bien que les accordeurs de piano aient, paraît-il, une manière de procéder qui ne respecte pas exactement l'égalité des demi-tons[22].

La musique des périodes baroque et classique gagne souvent à être interprétée dans une gamme à tempérament inégal, dans la mesure où les tonalités utilisées ne comptent guère plus de quatre ou cinq accidents (dièses ou bémols) à la clé.

IV.8 Deux p'tites dernières

IV.8.1 Gamme des solfèges : 53 notes ?! Et d'ailleurs, les musiques du monde font comment…

Le procédé de Pythagore était d'aller de quinte en quinte, jusqu'à revenir sur une octave la plus proche possible. Il avait donc trouvé que 12 quintes donnent environ 7 octaves.

On pourrait écrire aujourd'hui que $\frac{12}{7}$ approche bien la solution (notée S) de l'équation $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$.

En écrivant $\left(\frac{3}{2}\right)^{12/7} \approx 2$ *ie* $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7$ on comprend que cela ait « fonctionné ».

Or, on pourrait chercher à approcher encore mieux cette solution S par une fraction plus précise.

C'est un problème lié à ce qu'on appelle « les fractions continues ».
On trouve les fractions suivantes : 1/1, 2/1, 5/3, 12/7, 41/24, 53/31, 306/179, 665/389, …
Bien sûr, pour chaque fraction, on peut calculer l'erreur commise en approchant la solution.

On n'obtient pas ici la première approximation de Pythagore : 7 quintes pour 4 octaves (erreur[23] $\approx$ 6,8 %).
Mais :
- pour 12/7 (gamme de Pythagore) : erreur $\approx$ 1,4 %
- pour 41/24 : erreur $\approx$ -1,1 %
- pour 53/31 : erreur $\approx$ 0,2 %
- pour 306/179 : erreur $\approx$ -0,1 %
- pour 665/389 : erreur $\approx$ 0,004 %

En enchaînant 53 quintes, la différence avec 31 octaves est vraiment faible.
On décide donc de créer non pas 7 ou 12 notes, mais ***53 notes***.
C'est ce qu'on appelle la ***gamme des solfèges***, ou ***tempérament à 53 intervalles égaux***.
$2^{\frac{1}{53}}$ (un cinquante-troisième d'octave) s'appelle un comma.

Un ton vaut alors 9 commas et un demi-ton vaut 5 ou 4 commas suivant qu'il est placé entre deux notes de même nom (comme entre Ré et Ré#), ce que les musiciens appellent un demi-ton chromatique, ou entre deux notes de noms différents (comme entre Ré et Mi*b* ou entre Si et Do), ce que les musiciens appellent un demi-ton diatonique. Un ***Do# et un Réb diffèrent donc d'un comma*** !

La quinte a une fréquence de $2^{31/53} \approx 1{,}4999$, donc très proche de la quinte juste.
Cette gamme est celle des violonistes où il est possible de jouer une différence d'un comma avec ses doigts.

---

22 Voir page 50 du document suivant (utilisation des *battements*) : http://ssl7.ovh.net/~pianoteq/philippe/sons-musique.pdf

23 On parle ici de l'erreur relative en approchant la fréquence de la 7e quinte d'une note par sa 4e octave : $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^7 - 2^4\right) \div 2^4$.

Mais théoriquement, à l'oreille, un violoniste peut se rapprocher encore plus de la quinte juste…
Comme quoi la théorie ne fait pas tout, il faut savoir retourner à la source : l'harmonie naturelle :)

Remarques :

- L'intérêt théorique de ***cette division de l'octave a été mise en évidence dès l'Antiquité***.

Le théoricien chinois ***Ching Fang (78-37 av. J.-C.)*** a en effet découvert que 53 quintes pures sont très proches de 31 octaves. Il a calculé l'écart entre ces intervalles qui peut être approché, avec 6 décimales, par la fraction 177147/176776. Bien plus tard, cette observation fut à nouveau faite par le mathématicien et théoricien de la musique ***Nicolaus Mercator*** (vers 1620-1687) qui en a donné la formule $3^{53}/2^{84} \approx 1{,}0021$ (comma de Mercator).

- Le solfège occidental se limite aux demi-tons contrairement aux ***musiques d'Afrique, d'Asie*** (notamment arabe, persane, indienne, turque ou d'Europe de l'Est) qui ***contiennent des quarts de ton***. Il n'est donc pas possible de noter ces musiques à l'aide de ce solfège. L'ouverture des influences musicales à la fin du XXe siècle a permis à la musique moderne occidentale de réintégrer ces quarts de ton et le solfège classique a évolué vers de nouveaux types de notation, comme cette gamme à 53 notes…

Division de la gamme en 53 intervalles.

calculée autour du LA = 440 Hz.

notes	Hz	ratio décimale	ratio fractionaire	rapport entre intervalles
DO^4	521.48	2	2 / 1	
		1.973081		1.013643
		1.946524		1.013643
		1.924338		1.011529
SI	495	1.8984375	243 / 128	1.013643
		1.872885		1.013643
		1.847677		1.013643
		1.826618		1.011529
LA#	469.86	1.802036	180 000 / 99 887	1.013643
SI ♭	463.54	1.777778	16 / 9	1.013643
		1.753850		1.013643
		1.733860		1.011529
		1.710523		1.013643
LA	**440**	**1.6875**	**27 / 16**	1.013643
		1.664787		1.013643
		1.642379		1.013643
		1.623661		1.011529
SOL#	417.66	1.601807	200 000 / 124 859	1.013643
LA ♭	412.04	1.580247	128 / 81	1.013643
		1.558977		1.013643
		1.541209		1.011529
		1.520465		1.013643
SOL	391.11	1.5	3 / 2	1.013643
		1.479811		1.013643
		1.459893		1.013643
		1.443254		1.011529
FA#	371.25	1.423829	729 / 512	1.013643
SOL ♭	366.25	1.404664	1024 / 729	1.013643
		1.385758		1.013643
		1.369964		1.011529
		1.351524		1.013643
FA	347.65	1.333333	4 / 3	1.013643
		1.315387		1.013643
		1.297683		1.013643
		1.282892		1.011529
MI	329.99	1.265625	81 / 64	1.013643
		1.248590		1.013643
		1.231785		1.013643
		1.217745		1.011529
RÉ#	313.24	1.201355	245 760 / 204 569	1.013643
MI ♭	309.03	1.185185	32 / 27	1.013643
		1.169233		1.013643
		1.155907		1.011529
		1.140349		1.013643
RÉ	293.33	1.125	9 / 8	1.013643
		1.109858		1.013643
		1.094920		1.013643
		1.082440		1.011529
DO#	278.44	1.067871	2 187 / 2048	1.013643
RÉ ♭	274.69	1.053498	256 / 243	1.013643
		1.039318		1.013643
		1.027473		1.011529
		1.013643		1.013643
DO^3	260.74	1	1 / 1	1.013643

IV.8.2 Gamme « pure » (celle des harmoniques)

On prend toutes les harmoniques (voir V.1 Un son « pur » c'est moche ?) de la corde jusqu'à la 16ème.
Donc toutes les notes sont des multiples entiers de la fondamentale.
Quand on remet tout à l'intérieur de l'octave, on obtient une suite de notes qui sont toutes dans des rapports entiers entre elles : ***tous les accords sont justes, c'est la division harmonique de l'octave***.

A l'oreille, aucun intervalle n'est identique.
Tous les rapports de fréquence sont simples :

DO → RE → MI → FA# → SOL → Lab → Sib → SI → DO

9/8 10/9 11/10 12/11 13/12 14/13 15/14 16/15

Il y a 8 notes ! Mais on pourrait continuer la construction des harmoniques de Do…
Qui joue dans cette gamme ? Presque personne. Les trompes de chasse jouent jusqu'à la 12ème harmonique.
Mais pourquoi, puisque c'est composé de sons « purs » (justes) ?!

Eh bien… aucun écart n'est identique (ils diminuent même de 1,125 à $\approx$ 1,067) ! C'est totalement impossible de transposer… Si on part de Do l'écart entre Do et Ré est de 9/8. En gardant les mêmes réglages, partir de Sol impose un écart de 13/12 entre Sol et La, qui est très différent de 9/8 ! (écart de 3,84 %)

V. Dans un Do il y a du Sol, du Mi, du Ré… ?!

V.1 Un son « pur » c'est moche ?

Un son est très rarement constitué d'une seule fréquence.
Il est en général un "mélange" de plusieurs fréquences, donc de plusieurs notes de notre gamme.

Quand on entend le "La" à 440 Hertz, par exemple d'un violon, on y trouve une onde sonore de fréquence 440 Hz, qu'on appelle la fréquence fondamentale, mais on y entend aussi d'autres sons : ce sont des ondes de fréquences multiples de la fréquence fondamentale. On entend par exemple un harmonique de fréquence égale à deux fois la fondamentale ($2\times440=880$ Hz), à 3 fois la fondamentale ($1\,320$ Hz), etc.

Pour la plupart des instruments lorsque qu'un son est joué, il est en réalité composé d'***une multitude de sons additionnels***, mais qui sont présents dans le son de base. ***Une note jouée par un instrument contient d'autres notes que l'on n'entend pas mais qui résonnent***. Ces sons additionnels se nomment les ***harmoniques***. Un son pur n'est pas « joli » d'ailleurs.

Filtrages du Do-2 d'un piano :

- son original : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/do3complet.wav
- les trois premiers harmoniques : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/do3h123.wav
- le premier harmonique : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/do3h1.wav
- le troisième harmonique : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/do3h3.wav

Quelques sons « purs » (sinusoïdaux) : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/sinus.wav

Une note, puis ajout des harmoniques 1, 2, 3, 4 : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/ajoutharm1.wav
Une note, puis ajout des harmoniques 1, 3, 5, 7 : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/ajoutharm2.wav

L'importance des harmoniques se remarque fort bien lorsque l'on joue simultanément plusieurs notes.
Sur un piano, un Do joué à la basse et un Mi joué à l'aigu sonnent bien. Par contre leur renversement, un Mi à la basse avec un Do à l'aigu, sonne mal. La raison en est que, dans le premier cas le Do bas possède comme cinquième harmonique un Mi, de même que le Mi haut ; par contre dans l'autre cas, le Mi bas possède comme 3e harmonique (et comme 6e, 12e…) un Si trop proche du Do haut.

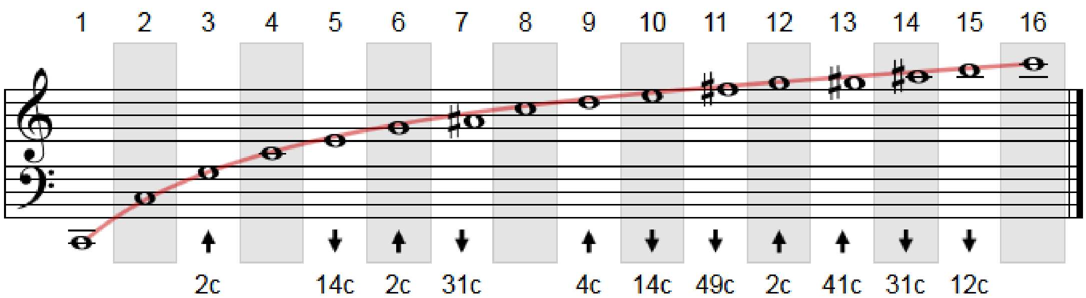
Un son comportant un grand nombre d'harmoniques sera perçu comme « riche » (exemple du clavecin ou du violon), alors qu'un son ne comportant que peu d'harmoniques sera perçu comme « pauvre » (exemple de la flûte douce).

Harmoniques du Do :

Harmonique	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence (Hz)	32,7	65,4	98,1	130,8	163.5	196,2	228,9	261,6	294,3	327	359,7	392,4
Note^{octave} de la gamme la plus proche	*do*$^{-1}$	*do*^{1}	*sol*^{1}	*do*^{2}	*mi*^{2}	*sol*^{2}	*si*^{2} ♭	*do*^{3}	*ré*^{3}	*mi*^{3}	*fa*^{3} ♯	*sol*^{3}
Écart à la note de la gamme la plus proche (cents)	0	0	2	0	-14	2	-31	0	4	-14	-49	2

En regardant attentivement le tableau des fréquences de notes ci-dessus, les musiciens trouveront une correspondance entre les fréquences harmoniques d'une note et les notes qui s'accordent harmonieusement avec la fondamentale. On sait par exemple que pour la note do, les notes constituant des intervalles naturels avec elle sont mi (la tierce), sol (la quinte), si *b* (la septième), do (l'octave), ré (la neuvième), etc.

V.2 En gamme tempérée, ça donne quoi les harmoniques ?



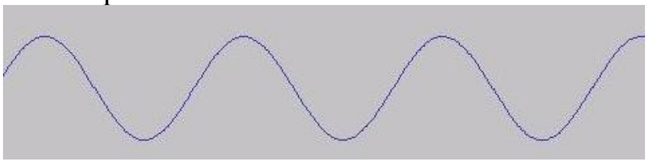
L'image ci-dessus indique les harmoniques du do[1] sur une portée, et précisent par les flèches et les chiffres (en cents) l'écart de hauteur entre chacun des 16 premiers harmoniques et la note la plus proche dans la gamme tempérée. Considérant que le demi-ton (du tempérament égal) fait 100 cents, la déviation de 49 cents de l'harmonique 11 est donc quasiment à mi-chemin entre deux notes existantes, c'est-à-dire un quart de ton.
Les écarts des harmoniques avec les notes de la gamme tempérée se retrouvent quelle que soit la note fondamentale et sont propres au rang de l'harmonique.

Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Serie_harmonique.mid pour écouter ***une série des 16 premiers harmoniques (en gamme tempérée, donc très approximative… et tout à fait fausse dans les six dernières notes !)***.

V.3 Avec des graphiques et du son, c'est plus clair

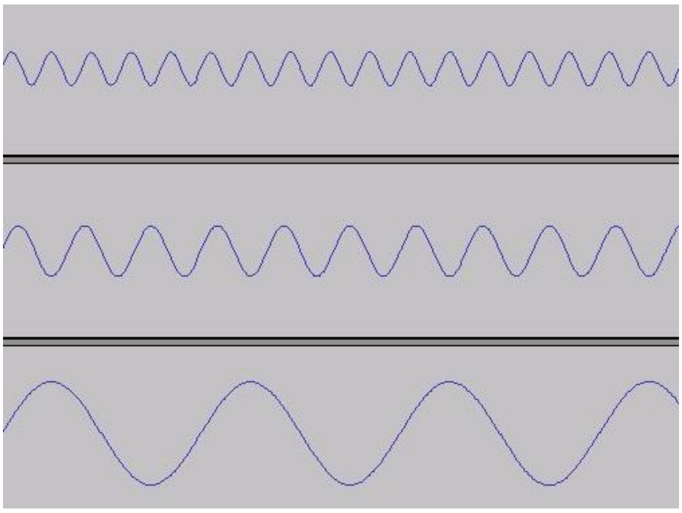
V.3.1 Son pur et son avec ses harmoniques

Un son parfaitement sinusoïdal et sans aucun harmonique (« pur ») ressemble à ça, vu à l'oscilloscope :



et sonne comme ça : http://didierdescamps.free.fr/solfege/la_sin.wav

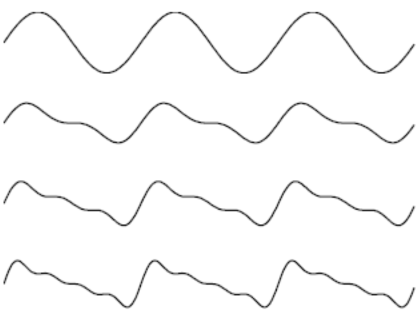
Le même avec deux harmoniques aux fréquences 3 et 5 :



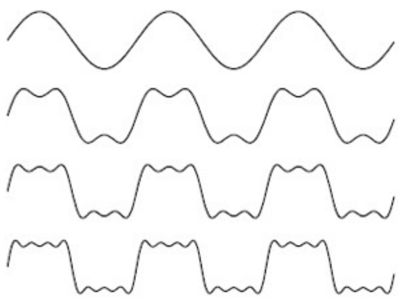
Les mêmes, mais maintenant réunis en un son unique :

qui sonne ainsi :
http://didierdescamps.free.fr/solfege/la_timbre.wav

Autre exemple :



ajout des harmoniques 1, 2, 3, 4
(modèle simplifié d'un son de violon)



ajout des harmoniques 1, 3, 5, 7
(modèle simplifié d'un son de clarinette)

Un son pur, et ce même son auquel on ajoute ses harmoniques de rang 2, 3 et 4 :
https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/ajoutharm1.wav

Un son pur, et ce même son auquel on ajoute ses harmoniques de rang 3, 5 et 7 :
https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/ajoutharm2.wav

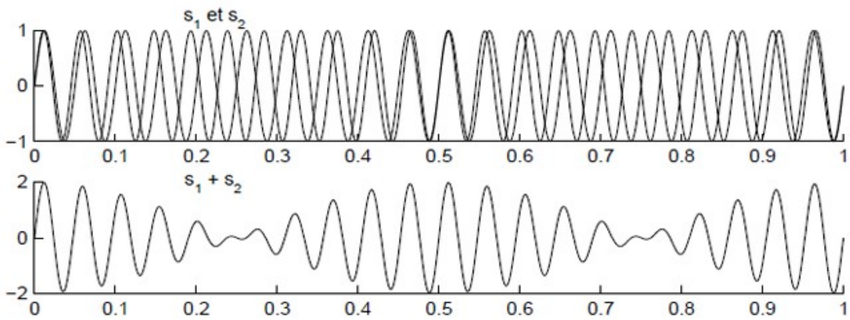
V.3.2 Son non périodique

D'autres instruments, comme les cloches, la plupart des instruments à percussion (timbale etc), ainsi que le piano dans une faible mesure, produisent des sons qui ne sont plus périodiques. En termes de fréquences, cela se traduit par le fait qu'il n'existe pas de fréquence f telle que toutes les fréquences f_n soient des multiples entiers de f (les fréquences présentes dans le son sont alors appelées *partiels*, comme $0.5f$, $1.2f$ etc).

exemple de son non périodique (timbale)

Exemple de son non-périodique (grande cloche) : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/cloche1.wav
Son original de cette cloche : https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/grande_cloche.wav

V.3.3 Un battement, ça s'entend ?



deux fréquences proches et leur superposition qui produit un *battement*.

Lorsque les deux sinusoïdes sont en phase, elles se renforcent (t = 0, 0.5 et 1).
En opposition de phase aux instants t = 0.25 et t = 0.75, elles s'annulent mutuellement.
C'est le phénomène de ***battement*** : le son s'amplifie et s'atténue périodiquement à la fréquence $\frac{81}{64}\div\frac{5}{4}=\frac{81}{80}$ (ici 2 Hz).

Pour ajuster les deux cordes à la même fréquence, il suffit donc de faire disparaître ce battement.
Ce n'est pas la fréquence d'une corde individuelle que mesure l'oreille de l'accordeur ou du musicien, mais la fréquence (on dit aussi la vitesse) du battement produit par deux cordes différentes. En effet, une différence d'un demi-hertz entre deux cordes jouées consécutivement est inaudible, même pour l'ouïe la plus fine, alors qu'un battement d'un demi-Hz entre deux cordes jouées simultanément est parfaitement audible pour une oreille un tant soit peu entraînée.

A écouter :

- Battement produit par deux sons purs de 440 Hz et 442 Hz
  https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/battements.wav
- Battements allant en s'atténuant lors de l'accord d'un unisson, l'accord d'une octave, l'accord d'une quinte et l'accord d'une tierce :
  https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/accorduniss.wav
  https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/accordoctav.wav
  https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/accordquint.wav
  https://mathemathieu.fr/zic_harmonie/accordtierc.wav

Sources :

* suite harmonique

http://www-math.unice.fr/publis/coppo_Zenon-Euler.pdf
http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/sn/node18.html
http://www.dcode.fr/serie-harmonique
http://www.calvados.fr/cms/accueil-calvados/les-archives-departementales/librairie/brochures-gratuites/histoire-des-sciences_1/autour-denNicolas-oresme-un-savant-au-XIVe-siecle
http://eljjdx.canalblog.com/archives/2008/02/23/8064292.html

* musique :

Son et musique (module d'ouverture de seconde année de l'INSA Toulouse), Philippe Guillaume
http://maths-sciences-lp.ac-amiens.fr/sites/maths-sciences-lp.ac-amiens.fr/IMG/dossier_musique/musique_dossier.pdf
http://emalbanais.free.fr/IMG/pdf/Frequences_gammes.pdf
https://fr.wikipedia.org/
http://www.levirtuose.com/index.php?id=1294
http://eljjdx.canalblog.com/archives/2008/02/23/8064292.html
http://www.proba.jussieu.fr/users/lma/mathmu/mathmu.html
http://classic-intro.net/introductionalamusique/lagrece2.html
http://clio.revues.org/2542#ftn3
http://www.student-crlg.be/student-crlg/src/php/download/download_syllabus.php?id=7
http://www.ifac.univ-nantes.fr/IMG/pdf/L3-CoursM1-EXTRAIT-Guy-Arithmetique_de_la_musique_etudiants.pdf
http://tpemusiquemodale-tonale.jimdo.com/syst%C3 %A8me-modal/la-gamme-pythagoricienne/
http://apmep.poitiers.free.fr/IMG/pdf/gammes_modes_temperaments.pdf
http://gilles.bannay.free.fr/wordpress/gamme.html
http://didierdescamps.free.fr/solfege/intervalles.html
http://ssl7.ovh.net/~pianoteq/philippe/
http://patrice.bailhache.free.fr/decibels/