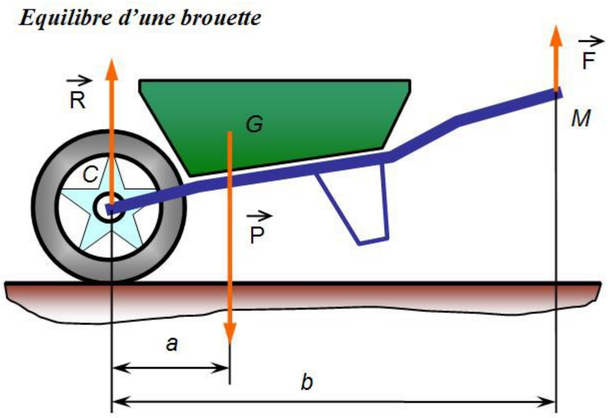
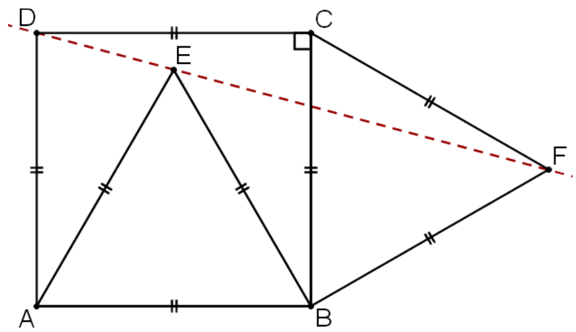
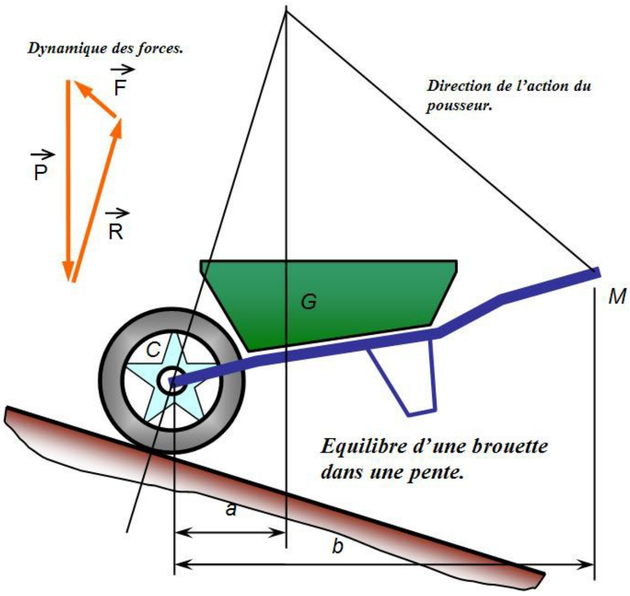
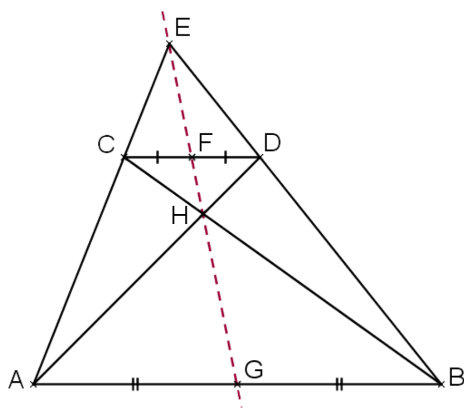
VECTEURS DU PLAN

Table des matières







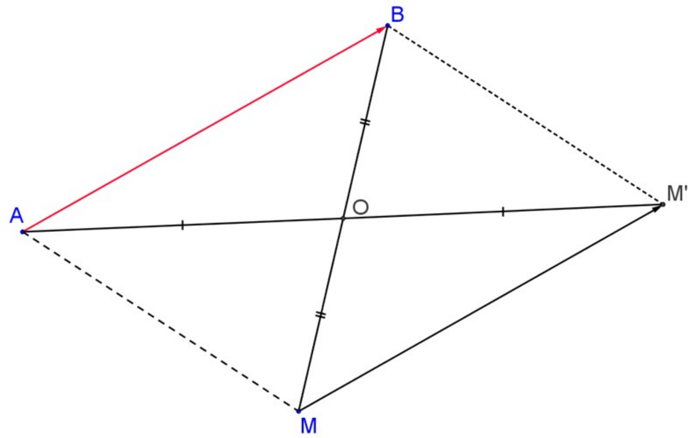


Source des images (à gauche) : Wikipedia

I. Notion de translation et de vecteur

I.1 Définition

Définition : Soient A et B deux points du plan.
À tout point M du plan, on associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont le même milieu. On dit que M' est ***l'image*** de M par ***la translation de vecteur*** $\overrightarrow{AB}$.



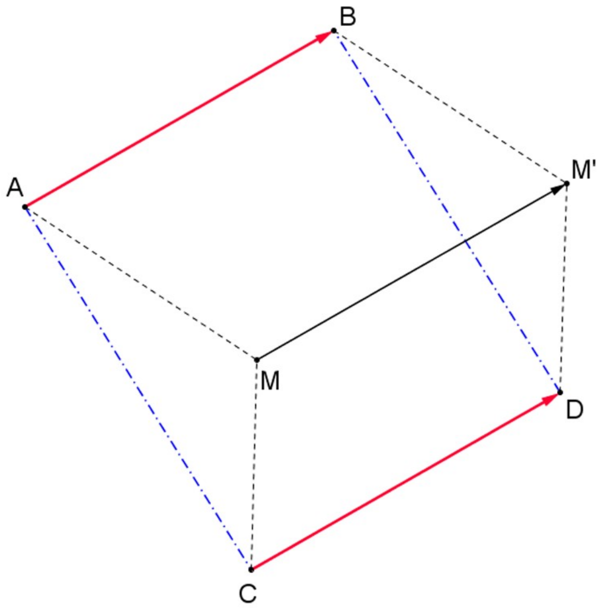
Propriété : M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $ABM'M$ est ....

DÉMONSTRATION : un quadrilatère est .... si et seulement si .... d'où la propriété.

Remarque : l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point .... .

I.2 Vecteurs égaux

On considère quatre points A, B, C et D. La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont égales si tout point M a la même image par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.



Propriété : soient A, B, C, D quatre points.
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont égales si et seulement si ....

Définition : on dit alors que ***les vecteurs*** $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ ***et*** $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ ***sont égaux***, et on note : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
On dit que $\overrightarrow{CD}$ est .... du vecteur $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants d'un même vecteur, que l'on peut noter $\vec{u}$ par exemple.

Autrement dit :

Propriété : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si ....

DÉMONSTRATION : EN CLASSE

Remarque : deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc égaux si et seulement si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles : on dit qu'elles ont même .... ;
- le .... de A vers B est le même que celui de C vers D
- les segments [AB] et [CD] ont même .... : .....=..... .

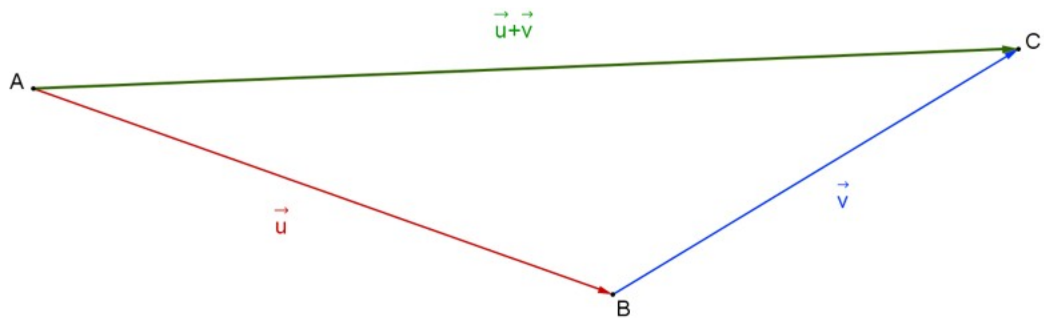
II. Somme de vecteurs

Propriété : L'enchaînement de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation.

DÉMONSTRATION : EN CLASSE

Remarque : dans la démonstration de cette propriété, on montre que si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ alors l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteurs $\overrightarrow{AC}$.

Définition : la ***somme des vecteurs*** $\vec{\mathbf{u}}$ ***et*** $\vec{\mathbf{v}}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note alors ce vecteur $\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}$.



Avec la remarque et la définition, on en déduit immédiatement la relation suivante :

Propriété : **RELATION DE CHASLES**

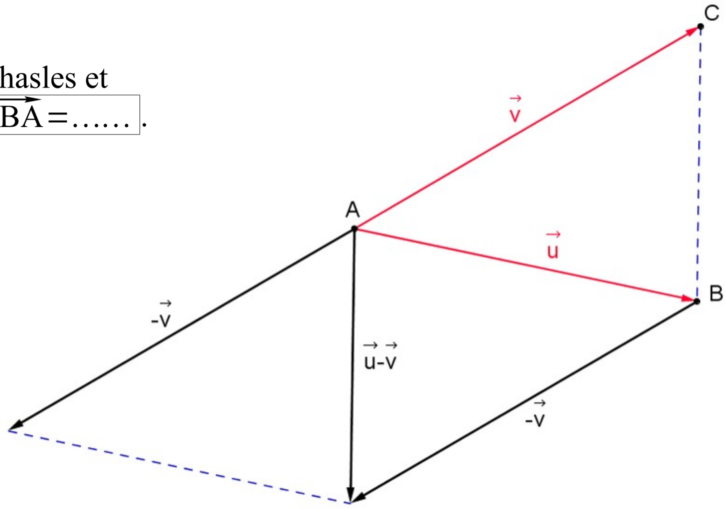
Pour tous les points A, B et C du plan :

Définitions :

soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et A , B et C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

- On appelle ***vecteur nul*** le vecteur associé à la translation transformant A en A : on le note $\vec{0}$.
  On en déduit facilement (avec la définition d'une translation) que : $\vec{0}=\overrightarrow{MM}$ pour tout point M;
- On appelle ***vecteur opposé*** au vecteur $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{BA}$, que l'on note $-\vec{u}$.
  Autrement dit : $\boxed{-\overrightarrow{AB}=}$...
- On appelle ***différence*** du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}$, égale à $\vec{u}+(-\vec{v})$.

Remarque : d'après la relation de Chasles et la définition du vecteur nul : $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=......}$.



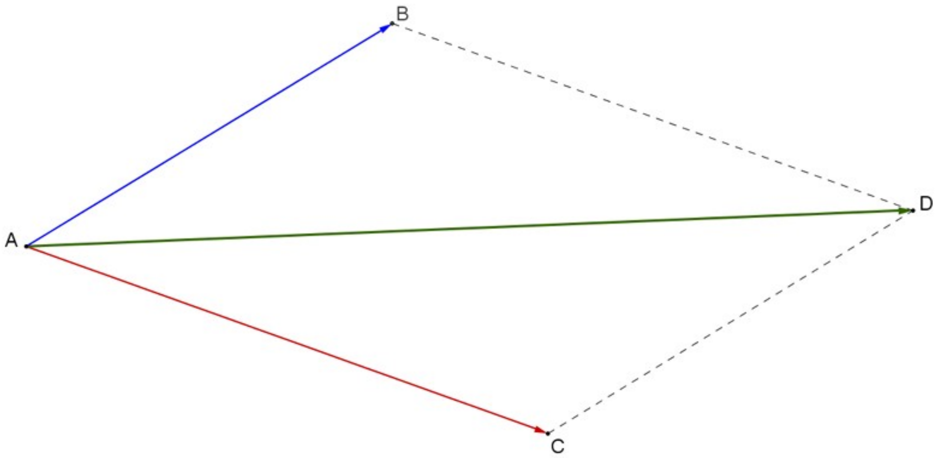
Propriétés : soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan.

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\dots$;
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

DÉMONSTRATIONS : en classe. Première propriété : un peu de travail. Deuxième et troisième propriété : facile avec la relation de Chasles.

Propriété : RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME

Soient A , B , C et D quatre points non alignés.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ si et seulement si ....



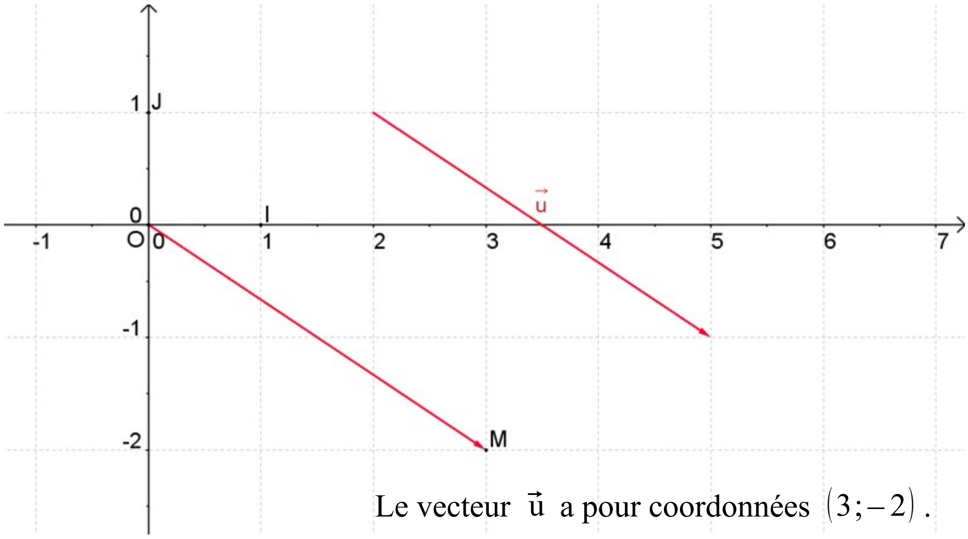
DÉMONSTRATION : facile. Aide/rappel : ABDC parallélogramme ⇔ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

Remarque : cette règle du parallélogramme permet de construire géométriquement la somme de deux vecteurs de même origine.

III. Coordonnées d'un vecteur

III.1 Coordonnées d'un vecteur

Définition : On se place dans un repère du plan (O ; I ; J).
Les ***coordonnées d'un vecteur*** $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.



Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(3;-2)$.

Cas particulier : le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $(0;0)$.

Remarque : **NOTATION D'UN REPÈRE**
Au lieu de noter $(O;I;J)$ un repère, on peut le noter $(O;\vec{i};\vec{j})$ où $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

Propriété : Deux vecteurs sont égaux si et seulement si :
ils ont .... dans un repère quelconque du plan.

DÉMONSTRATION : en classe.

III.2 Coordonnées d'un vecteur défini par deux points

Propriété : soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points dans un repère du plan.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont (............ ; ....).

DÉMONSTRATION : on note M le point tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$.

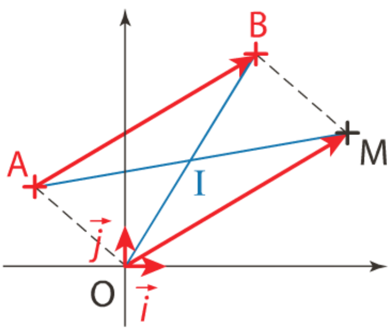
Les segments [OB] et [AM] ont le même milieu I donc :

$x_I=\dfrac{x_O+x_B}{2}=\dfrac{x_B}{2}$ et $x_I=\dfrac{x_A+x_M}{2}$.

On en déduit : $x_B=x_A+x_M$ donc $\boxed{x_M=........}$.

De même : $\boxed{y_M=........}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant celles du point M, la propriété est démontrée.



III.3 Coordonnées de l'opposé d'un vecteur, de la somme de deux vecteurs

Propriété : soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan, et deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$.

- le vecteur $-\vec{u}$ a pour coordonnées $(-x;-y)$;
- le vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$.

DÉMONSTRATIONS : en classe.

IV. Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition : Soient k un réel et $\vec{u}$ $(a ; b)$ un vecteur dans un repère du plan.
Le ***vecteur produit de $\vec{u}$ par k***, noté $k\vec{u}$, est le vecteur de coordonnées (… ; …).

Remarque importante : on admet que le vecteur $k\vec{u}$ ainsi défini ne dépend pas du repère choisi.

Propriétés : Soient k et k' deux nombres réels, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

- $k\vec{u}+k\vec{v}=\dots$
- $k\vec{u}+k'\vec{u}=\dots$
- $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$ (ce que l'on note alors $kk'\vec{u}$)
- $k\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow[k=0$ ***ou*** $\vec{u}=\vec{0}]$

DÉMONSTRATIONS : en classe.

Exemple : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$7(\vec{u}+3\vec{v})-5\vec{u}+4\vec{v}=\dots$$

V. Colinéarité, alignement et parallélisme

Définitions : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan non nuls.
- On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.
- Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Propriété : *colinéarité et alignement*
Soient trois points deux à deux distincts : A, B et C.
A, B et C sont alignés ***si, et seulement si,*** les vecteurs …

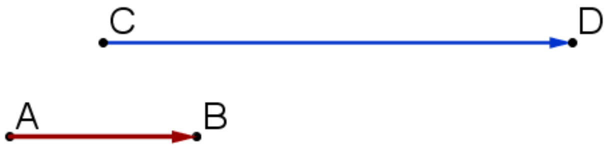
DÉMONSTRATION : en classe

$$\overrightarrow{AB}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$$

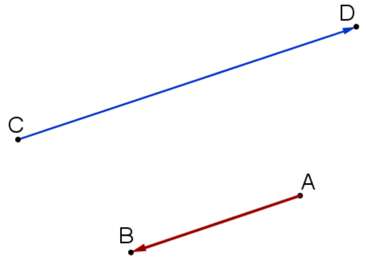
$$\overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{AC}$$

Propriété : *colinéarité et parallélisme*
Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ***si, et seulement si,*** …

DÉMONSTRATION : en classe



$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CD}$



$\overrightarrow{CD} = -2\,\overrightarrow{AB}$

Exercice : soient ABC un triangle, M et N deux points tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC}$, où k ∈ ℝ.

1. En utilisant la relation de Chasles $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$, démontrer que $\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC}$.

2. En déduire que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

3. Quelle théorème venez vous de démontrer ?

COMPLÉMENT (propriété hors programme)

Propriété : Soient $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ***si, et seulement si,*** $xy' - yx' = 0$.

DÉMONSTRATIONS : en classe.

Exemple : $\vec{u}(1,7 ; 7,65)$ et $\vec{v}(1,2 ; 5,4)$ sont colinéaires car ...