Restitutions Organisées de Connaissances sous forme d'exercices « type Bac »

Dans ce document figurent des exercices « type Bac » correspondant aux ***18 démonstrations explicitement au programme de terminale S****, dont* ***10 sont « exigibles et correspondent à des capacités attendues »*** *: elles sont marquées d'une étoile (*).*

Bien sûr, on peut vous demander de démontrer une « petite » propriété qui ne figure pas dans ce document (comme ce fut le cas au bac 2014). Ici ne figurent que les démonstrations explicitement écrites dans le programme : ce sont sans doute les moins simples.

SOMMAIRE

*1. Théorème de comparaison (suites)

Exercice 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : - à partir d'un certain rang n_1, $u_n \leqslant v_n$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Soit A un réel strictement positif et $\mathrm{I} =]\mathrm{A}\,;+\infty[$.

1. Pourquoi, à partir d'un certain rang n_2, I contient tous les termes de la suite (u_n) ?

2. Démontrer qu'il existe un rang noté n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n \in$ I.

3. Que peut-on en déduire de la question précédente ?

2. Inégalité de Bernoulli

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif.
Démontrer que pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

*3. Limite d'une suite géométrique

Exercice 3

Soit q un réel tel que $q>1$.
On rappelle l'inégalité de Bernoulli : pour tout réel $a>0$, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

1. Démontrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que : $q^n \geqslant 1+na$.

2. En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

4. Majoration d'une suite croissante convergente

Exercice 4

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers un réel noté l.

1. Supposons qu'il existe un terme u_N de la suite (u_n) strictement supérieur à l.

a) Démontrer que $]l-1\,;u_\mathrm{N}[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_0.

b) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$: $u_n \notin\ ]l-1\,;u_\mathrm{N}[$.

2. Quel théorème peut-on déduire de la question 1. ?

5. Divergence d'une suite croissante non majorée

Exercice 5

Soit (u_n) une suite croissante non majorée et $\text{I}=]\text{A};+\infty[$ où A ∈ ℝ.

1. Démontrer qu'il existe un entier naturel N tel que $u_\text{N}>\text{A}$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel *n* tel que $n\geqslant \text{N}$: $u_n>\text{A}$.

3. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ? Justifier.

*6. Unicité de la fonction exponentielle

Exercice 6

On admet[1] l'existence d'une fonction *f* dérivable sur ℝ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
Nous allons démontrer que cette fonction est unique.

On définit la fonction h par $h(x)=f(x)f(-x)$.

1. a) Démontrer que la fonction *h* est constante sur ℝ.

b) En déduire que, pour tout réel x : $f(x)f(-x)=1$.

c) En déduire que la fonction *f* ne s'annule pas sur ℝ.

2. Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur ℝ telles que $f'=f$, $g'=g$, $f(0)=g(0)=1$.

D'après la question 1., g ne s'annule pas sur ℝ. On définit alors la fonction k par : $k=\dfrac{f}{g}$.

a) Démontrer que pour tout $x \in$ ℝ : $k(x)=1$.

b) En déduire que $f=g$.

*7. Limites en l'infini de la fonction exponentielle

Exercice 7.1

On définit la fonction f par $f(x)=\text{e}^x-x$ pour tout réel x .

1. a) Démontrer que f est strictement croissante sur ℝ.

b) En déduire que pour tout réel $x\geqslant 0$: $\text{e}^x\geqslant x$.

2. Que peut-on en déduire sur la limite de la fonction exponentielle en +∞ ? Justifier.

1 Cela découle du théorème de Cauchy-Lipschitz (difficile – au programme de l'Agrégation de mathématiques), qui dit que sous certaines conditions, une équation différentielle dont on connaît une valeur admet au moins une solution.
Voir par exemple : http://sandrine.toonywood.org/pageperso/agreg/cauchy-lipschitz.pdf

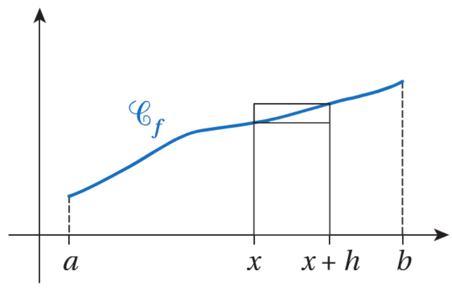
Exercice 7.2

On admet que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. En déduire que $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

8. Théorème fondamental de l'analyse(intégration)

Exercice 8

Soit f une fonction croissante, continue et positive sur $[a;b]$.



Soit F la fonction définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Soit $x\in[a;b]$. On pose $h \in \mathbb{R}$ avec $h>0$ et $x+h \in [a;b]$.

1. Démontrer que : $F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$.

2. Démontrer que : $h\times f(x)\leqslant\int_x^{x+h} f(t)\,dt\leqslant h\times f(x+h)$.

3. En déduire que : $f(x)\leqslant\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x+h)$.

4. Justifier que : $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$.

5. On admet que le résultat de la question 3. est toujours vrai avec $h<0$.
Que peut-on en déduire sur F ?

9. Continuité et existence de primitives

Exercice 9

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$.
On admet que f admet un minimum m sur $[a;b]$.
On pose $g(x)=f(x)-m$.

1. Démontrer que g est continue et positive sur $[a;b]$.

2. On définit les fonctions G et F sur $[a;b]$ par $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$ et $F(x)=G(x)+mx$.

Démontrer que F est une primitive de f sur $[a;b]$.

10. Théorème du toit

Exercice 10

Soient P et P' deux plans sécants suivant une droite Δ.
Soit d une droite incluse dans P et parallèle à une droite d' du plan P'.
On suppose que d et d' ne sont pas confondues.

1. Supposons que Δ et d soient sécantes, et notons M leur point d'intersection.

a) Démontrer que : $\mathrm{M} \in P'$.

b) En déduire que : d est incluse dans le plan P'.

c) En déduire que les droites d et Δ sont confondues.

2. De la question 1., on déduit que Δ et d ne sont pas sécantes.
En déduire que la droite Δ est parallèle à la droite d, puis que la droite d est parallèle à la droite d'.

Remarque : deux autres démonstrations sont proposées dans le document qui contient les démonstrations.

*11. Équation cartésienne d'un plan

Exercice 11.1

On munit l'espace d'un repère orthonormé.

Soit P un plan de vecteur normal non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et passant par $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}} ; y_{\mathrm{A}} ; z_{\mathrm{A}})$.

Démontrer qu'il existe un réel d tel que : $a x+b y+c z+d=0$.

Exercice 11.2

On munit l'espace d'un repère orthonormé.
Soit P l'ensemble des points $\mathrm{M}(x ; y ; z)$ tels que $a x+b y+c z+d=0$ avec $a \neq 0$.

1. Démontrer que le point A de coordonnées $\left(-\frac{d}{a} ; 0 ; 0\right)$ appartient à l'ensemble P.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(a ; b ; c)$. Démontrer que : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} . \vec{n}=0$.

*12. Droite orthogonale à un plan

Exercice 12

Soit d une droite, orthogonale à deux droites sécantes d'un plan P, notées d_1 et d_2.
On note $\vec{u}$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ des vecteurs directeurs respectifs de d, d_1 et d_2.
Soit Δ une droite du plan P, de vecteur directeur noté $\vec{v}$.

1. Justifier qu'il existe a et b deux réels tels que $\vec{v}=a\vec{u}_1+b\vec{u}_2$.

2. a) Démontrer que $\vec{u}.\vec{v}=0$.

b) Que peut-on en déduire sur d et Δ ?

*13. Événements indépendants

Exercice 13

Soient A et B deux événements indépendants.

1. Démontrer que : $p(\overline{\mathrm{A}}\cap \mathrm{B})=p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap \mathrm{B})$.

2. En déduire que : $p(\overline{\mathrm{A}}\cap \mathrm{B})=p(\overline{\mathrm{A}})\times p(\mathrm{B})$.

3. Que peut-on en déduire sur les événements $\overline{\mathrm{A}}$ et B ?

*14. Espérance de la loi exponentielle

Exercice 14

Soit λ un réel strictement positif.
Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t)=\lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Démontrer que g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que : $g(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{1}{\lambda}g'(t)$.

2. En déduire que : $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt=\frac{1}{\lambda}\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}-\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}+1\right)$.

3. En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x g(t)\,dt=\frac{1}{\lambda}$.

15. Durée de vie sans vieillissement (loi exponentielle)

Exercice 15

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
On admet que : $p(X \leqslant k) = 1 - e^{-\lambda k}$.

Démontrer que pour tous réels *t* et *h* positifs : $p_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = p(X \geqslant h)$.

*16. Seuil pour la loi normale centrée réduite

Exercice 16

Soit T une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}\ (0;1)$.
Soit $\alpha \in\ ]0;1[$.

1. Démontrer que pour tout réel *x* strictement positif :
$p(-x \leqslant T \leqslant x) = 2\,F(x)$ où F est la primitive de f qui s'annule en 0.

2. Démontrer que : $0 < \dfrac{1-\alpha}{2} < \dfrac{1}{2}$.

3. a) On admet que F est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif, noté u_α , tel que : $F(u_\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

b) En déduire qu'il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $p(-u_\alpha \leqslant T \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

*17. Intervalle de fluctuation asymptotique

Exercice 17

Soit $X_n \sim \mathcal{B}\ (n;p)$ et $\alpha \in\ ]0;1[$. On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
On admet qu'il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $p(-u_\alpha \leqslant T \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

1. En utilisant le théorème de Moivre-Laplace, démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} p(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

2. Démontrer que : $p(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = p\left(p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$

3. a) Compléter le théorème démontré : $\lim\limits_{n \to +\infty} p\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$ où $I_n = \ldots$

b) Comment s'appelle l'intervalle I_n ?

18. Intervalle de confiance

Exercice 18

Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

On admet qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$:

$$p(-2 \leqslant Z_n \leqslant 2) > 0{,}95 \text{ où } T \sim \mathcal{N}(0;1).$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$: $p\left(p - 2\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{X_n}{n} \leqslant p + 2\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0{,}95$.

2. On définit sur $[0;1]$ la fonction f par $f(p) = p(1-p)$.

a) Étudier la fonction *f* et dresser son tableau de variations sur $[0;1]$.

b) En déduire que $0 \leqslant \sqrt{p(1-p)} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$: $p\left(p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{X_n}{n} \leqslant p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0{,}95$.

3. Démontrer que : $F_n \in \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] \Leftrightarrow p \in \left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$:

l'intervalle $\left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion *p* avec une probabilité au moins égale à 0,95.