INTERVALLE(S) DE FLUCTUATION ASYMPTOTIQUE « DE TERMINALE » : SOYONS PLUS PRÉCIS

PROPRIÉTÉ Soit $X_n \sim \mathcal{B}\,(n;p)$. On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

Il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$:

$$\mathrm{p}\left(F_n \in \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 0{,}95 .$$

Démonstration : Soit $X_n \sim \mathrm{B}\,(n;p)$.

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

D'après le théorème de Moivre-Laplace :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{p}(-u_{0{,}049999} \leqslant Z_n \leqslant u_{0{,}049999}) = 0{,}950001 .$$

Notons $a_n = \mathrm{p}(-u_{0{,}049999} \leqslant Z_n \leqslant u_{0{,}049999})$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}950001$, d'où :

pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $a_n \in \,]0{,}950001 - \epsilon\,; 0{,}950001 + \epsilon[$.

Prenons ϵ = 0,000001.

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $a_n \in \,]0{,}95\,;0{,}950002[$.

Donc, dès que $n \geqslant n_0$ on a : $a_n > 0{,}95$, autrement dit $\mathrm{p}(-u_{0{,}049999} \leqslant Z_n \leqslant u_{0{,}049999}) > 0{,}95$.

Or, $u_{0{,}049999}$ vérifie $\mathrm{p}(-u_{0{,}049999} \leqslant \mathrm{T} \leqslant u_{0{,}049999}) = 0{,}950001$ donc, par symétrie :

$$\mathrm{p}(\mathrm{T} \leqslant u_{0{,}049999}) = 0{,}9750005$$

donc on trouve (avec la calculatrice) $u_{0{,}04999} > 1{,}9599$.

Puisque $\mathrm{p}(-u_{0{,}049999} \leqslant Z_n \leqslant u_{0{,}049999}) > 0{,}95$ et $u_{0{,}049999} < 1{,}96$, alors *à fortiori* :

$$\mathrm{p}(-1{,}96 \leqslant Z_n \leqslant 1{,}96) > 0{,}95 .$$

Et alors :

$$\mathrm{p}(-1{,}96 \leqslant Z_n \leqslant 1{,}96) > 0{,}95 .$$

$$\mathrm{p}\left(-1{,}96 \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant 1{,}96\right) > 0{,}95$$

$$\mathrm{p}(np - 1{,}96\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + 1{,}96\sqrt{np(1-p)}) > 0{,}95$$

$$\mathrm{p}\left(\frac{np - 1{,}96\sqrt{np(1-p)}}{n} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant \frac{np + 1{,}96\sqrt{np(1-p)}}{n}\right) > 0{,}95 \text{ car } n > 0$$

$$\mathrm{p}\left(\frac{np - 1{,}96\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant \frac{np + 1{,}96\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n}\right) > 0{,}95$$

$$\mathrm{p}\left(p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0{,}95 \text{ car } \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} .$$