

$$1. a) r_2 = 2r_1 - 0,4 = 2 \times 0,7 - 0,4 = 1$$

$$b) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \begin{aligned} u_{n+1} &= r_{n+1} - 0,4 \\ &= 2r_n - 0,4 - 0,4 \\ &= 2(r_n - 0,4) \\ &= 2u_n \end{aligned}$$

Donc  $(u_n)$  est géométrique de raison 2 et de premier terme  $u_1 = r_1 - 0,4 = 0,7 - 0,4 = 0,3$ .

$$c) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : u_n = u_1 \times 2^{n-1} \text{ ie } u_n = 0,3 \times 2^{n-1}.$$

$$\text{Donc : } r_n = u_n + 0,4 \\ = 0,3 \times 2^{n-1} + 0,4.$$

2. a) En effectuant les calculs des termes de  $(r_n)$  pour les rangs 1 à 8, on trouve :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$r_n$	0,7	1	1,6	2,8	5,2	10	19,6	38,8

b)

Planète	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne
Erreur absolue	0,023	0	0,077	0,003	0,463
Erreur relative	0,032	0	0,051	0,001	0,049

Calculs des erreurs absolues :  $|r_n - 0,723|$ . Calcul des erreurs relatives :  $\frac{|r_n - 0,723|}{r_n}$ .

Hormis pour Saturne, les erreurs absolues sont proches de 0.

Les erreurs relatives sont toutes inférieures à 6 %, la loi de Titius-Bode a donc donné des résultats très proches de la réalité (rappelons que cette loi a été émise en 1772 !).

c) L'objet céleste qui correspond au rang  $n=4$  est Cérès (2,765 UA), qui est une planète naine.

d) Neptune est la huitième planète du système solaire, et  $r_8 = 38,8$ .

$\frac{38,8 - 30,069}{30,069} \approx 0,29$  donc pour Neptune, la loi de Titius-Bode donne une erreur relative de 29 %, c'est

beaucoup trop loin de la réalité...

Malgré la prédiction de son existence grâce à cette loi, le résultat fourni par cette loi est faux !

$$e) \lim_{n \rightarrow -\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow -\infty} (0,4 + 0,3 \times 2^{n-1}) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,4 + 0,3 \times 2^{-n-1}) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,4 + 0,3 \times 2^{-(n+1)}) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 0,4 + 0,3 \times \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1. \text{ D'où : } \lim_{n \rightarrow -\infty} r_n = 0,4.$$

Cela correspond bien à ce que les scientifiques de l'époque observaient pour Mercure, et à ce que l'on trouve sur Wikipedia pour orbite de Mercure : 0,38709893 UA.

Afin de rester cohérent, les astronomes de l'époque prenaient donc un rang de «  $-\infty$  » pour Mercure ; ainsi, la loi de Titius-Bode restaient « pleine d'espoir »... pour un temps.