A. Suites récurrentes et matrices

1 Écriture matricielle de relations de définition de suites récurrentes

Différents types de suites définies par des relations de récurrence se ramènent à l'étude d'une suite de matrices colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1} = A X_n + B$ où A est une matrice carrée et B une matrice colonne.

EXEMPLE SUITE COUPLÉES

Soit deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 5 \text{ et } v_0 = -2 \text{ et, pour tout } n \geqslant 0 : u_{n+1} = 1{,}7u_n + 0{,}6v_n + 3 \text{ et } v_{n+1} = -5u_n + 0{,}1v_n - 1.$$

Si on définit, pour tout $n \geqslant 0$, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, alors les relations de récurrence ci-dessus s'écrivent aussi pour tout $n \geqslant 0$:

$$X_{n+1} = A X_n + B, \text{ où } A \text{ est la matrice carrée } A = \begin{pmatrix} 1{,}7 & 0{,}6 \\ -5 & 0{,}1 \end{pmatrix} \text{ et } B \text{ la matrice colonne } B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Justification de la relation : le produit matriciel AX_n est égal à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1{,}7u_n + 0{,}6v_n \\ -5u_n + 0{,}1v_n \end{pmatrix}$; on a donc bien l'équivalence de cette relation avec les relations de définition des deux suites.

EXEMPLE SUITE DÉFINIE PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE D'ORDRE 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 11$; $u_1 = -2$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 0{,}5u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Si on définit, pour tout $n \geqslant 0$, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ alors la relation de récurrence ci-dessus s'écrit aussi, pour tout $n \geqslant 0$:

$$X_{n+1} = A X_n \quad \text{où } A \text{ est la matrice carrée } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Justification de la relation : pour tout $n \geqslant 0$, la matrice colonne X_{n+1} est égale à $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et le produit matriciel AX_n est égal à la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -0{,}5u_n + 3u_{n+1} \end{pmatrix}$.

L'égalité matricielle $X_{n+1} = AX_n$ est donc équivalente au système d'égalités, formé d'une égalité triviale et de la relation de récurrence définissant la suite : $\begin{cases} u_{n+1} = u_{n+1} \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 0{,}5u_n \end{cases}$.

REMARQUE

La matrice colonne X_0 est la matrice $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ dans le premier exemple et la matrice $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ dans le second exemple.

2 Calcul de termes à l'aide de l'écriture matricielle des relations de définition de suites récurrentes

Les écritures précédentes permettent, en utilisant le calcul matriciel, de calculer des termes de la suite et de disposer aussi, dans le cas suivant, d'une écriture pour le terme général.

PROPRIÉTÉ

Soit une suite de matrices colonnes (X_n) telle que pour tout $n \geqslant 0$, $X_{n+1} = AX_n$. Alors :

$$\boldsymbol{X_n = A^n X_0} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

DÉMONSTRATION

On démontre la propriété «Pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$ » par récurrence sur n.
$A^0 X_0 = X_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
On suppose la propriété vraie au rang k, c'est-à-dire $X_k = A^k X_0$, alors au rang $k+1$, on a :

$$X_{k+1} = A\,X_k = A \times (A^k\,X_0) = (A \times A^k)\,X_0 = A^{k+1}\,X_0$$

La propriété est encore vraie au rang $k+1$.
Conclusion : la propriété $\boldsymbol{X_n = A^n X_0}$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$. ■

B. Convergence et état stable

Soit une suite de matrices colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1} = AX_n + B$.

1 Propriété de la limite dans le cas de la convergence

DÉFINITION

On dit que la **suite de matrices colonnes** (X_n) de taille p est **convergente** si les p suites formées par les termes correspondant à la même ligne sont convergentes.
La limite de cette suite est alors la matrice colonne formée des p limites obtenues.

Dans tous les autres cas, on dit que **la suite** est **divergente**.

THÉORÈME

Si une suite de matrices colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1} = A\,X_n + B$ est convergente, alors sa limite X est une matrice colonne vérifiant l'égalité $X = AX + B$.

DÉMONSTRATION

Dans l'égalité $X_{n+1} = AX_n + B$, le membre de droite converge vers X. De plus, comme conséquence des théorèmes concernant les limites de sommes et de produit par un nombre réel des suites convergentes, le membre de gauche converge vers $AX + B$. D'où, par unicité de la limite : $X = AX + B$. ■

REMARQUE

Le théorème précédent permet donc de dire que, dans le cas de la convergence, la limite de la suite de matrices colonnes est à rechercher parmi les suites constantes vérifiant la relation de récurrence.

2 Recherche d'une suite constante ou d'un état stable

La recherche d'une matrice colonne X vérifiant une relation du type $X = AX + B$ fait intervenir les résultats vus dans le chapitre 5 sur le calcul matriciel et la résolution de systèmes.

PROPRIÉTÉ

Soit I la matrice identité de même taille qu'une matrice A.
Si la matrice $I - A$ est inversible, pour toute matrice colonne B de même taille que A, il existe une et une seule matrice colonne X vérifiant $X = AX + B$.

DÉMONSTRATION

Par les propriétés du calcul matriciel, $X = AX + B \Leftrightarrow (I - A)X = B \Leftrightarrow X = (I - A)^{-1} \times B$ en multipliant à gauche les deux membres de dernière égalité par l'inverse de $I - A$.
Il y a donc une et une seule matrice colonne X solution de $X = AX + B$. ■

REMARQUE

Puisqu'il n'y a qu'une seule matrice colonne limite solution, **pour toute matrice colonne X_0 pour laquelle la suite (X_n) est convergente**, la limite X est indépendante des valeurs de X_0.

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Dans le cas où la matrice $I - A$ n'est pas inversible :

- soit il n'existe **aucune** matrice colonne vérifiant $X = AX + B$ (dans le cadre de la recherche d'une limite, cela signifie qu'il ne peut y avoir convergence) ;
- soit il existe **une infinité** de matrices colonnes X solution de $X = AX + B$ dont l'une est éventuellement la limite recherchée dans le cas de la convergence.

NOTE

Le paragraphe **C** suivant donne un exemple fréquent de ce type de situation.

REMARQUE

Dans ce cas, on recherche donc les éventuelles solutions en résolvant le système dont l'écriture matricielle est $X = AX + B$ ou $(I - A)X = B$.

D'autres conditions liées à la limite peuvent se rajouter à celles données par le système et permettre de déterminer parmi les solutions celle correspondant à la limite dans le cas de la convergence.

C. Application aux marches aléatoires

1 Comportement asymptotique d'une marche aléatoire

DÉFINITIONS

- On dit qu'une **marche aléatoire** est **convergente** si la suite des matrices colonnes (X_n) des états de la marche aléatoire converge.
- Dans le cas de l'étude d'une marche aléatoire telle que la suite des états de la marche aléatoire vérifie une relation du type $X_{n+1} = AX_n + B$, une suite constante vérifiant $X = AX + B$ est aussi appelée **état stable** de la marche aléatoire.

REMARQUE

Une marche aléatoire peut être convergente ou divergente selon l'état initial X_0. S'il y a convergence, d'après le théorème du paragraphe précédent, ce ne peut être que vers un état stable.

EXEMPLE

Soit la marche aléatoire pour laquelle on passe à chaque pas du sommet A au sommet B avec une probabilité de 1 et du sommet B au sommet A avec une probabilité de 1.

La matrice de transition de cette marche aléatoire est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si on note $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ l'état initial de la marche aléatoire alors, pour tout $n \geqslant 0$:

$$X_n = M^n X_0 \text{ avec } M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est pair et } M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

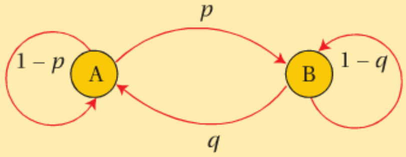
Ainsi $X_n = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ lorsque n est pair et $X_n = \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$ lorsque n est impair.

On en déduit que la suite des états (X_n) diverge pour toutes les valeurs de X_0 sauf dans le cas $a_0 = b_0 = \dfrac{1}{2}$ où la suite est alors constante de terme égal à X_0.

2 Cas des marches aléatoires sur un graphe probabiliste à deux sommets

PROPRIÉTÉ

Soit une marche aléatoire sur un graphe probabiliste à deux sommets du type :



avec $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$.

La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

Quel que soit l'état initial X_0 de cette marche aléatoire, elle converge vers un état stable unique $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tel que $X = MX$ et $a + b = 1$.

DÉMONSTRATION

Pour tout $n \geqslant 0$, si on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste après n pas, alors $a_n + b_n = 1$.

À l'aide de la relation $X_{n+1} = M \times X_n$ où M est la matrice de transition, on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} = (1-p)a_n + qb_n = (1-p)a_n + q(1-a_n) = (1-p-q)\,a_n + q.$$

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - \dfrac{q}{p+q}$. Pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{q}{p+q} = (1-p-q)\,a_n + q - \frac{q}{p+q} = (1-p-q)\,a_n - \frac{q(1-p-q)}{p+q}$$
$$= (1-p-q)\left(a_n - \frac{q}{p+q}\right) = (1-p-q)\,u_n.$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $1 - p - q$. Comme $|1-p-q| < 1$ (car $0 < p + q < 2$), cette suite **converge** vers 0.

On en déduit que la suite (a_n) converge vers $\dfrac{q}{p+q}$ puisque, pour tout $n \geqslant 0$, $a_n = u_n + \dfrac{q}{p+q}$.

Enfin, la suite (b_n) converge vers $\dfrac{p}{p+q}$ puisque, pour tout $n \geqslant 0$, $b_n = 1 - a_n$.

Ces limites sont bien indépendantes de l'état initial X_0.

Par le théorème de convergence vu au paragraphe **B**, la limite est un état stable $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. ■

REMARQUES

a. Pour la convergence, on peut aussi utiliser la décomposition proposée p. 102 qui donne M^n convergente car $|(1-p)-q| < 1$, donc $X_n = M^n X_0$ converge quel que soit X_0.

b. Ici, la matrice $I_2 - M$ n'est pas inversible car $I_2 - M = \begin{pmatrix} p & -q \\ p & -q \end{pmatrix}$; on peut rechercher l'état limite en utilisant les deux conditions qui suffisent à le déterminer : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est stable et $a + b = 1$.

En effet, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ stable implique $\begin{cases} (1-p)a + qb = a \\ pa + (1-q)b = b \end{cases} \Leftrightarrow b = \dfrac{p}{q}a$.

De plus, cet état stable vérifie $a + b = 1$ puisque la somme de la probabilité d'être en A et de la probabilité d'être en B fait 1 : donc a est solution de $a + \dfrac{p}{q}a = 1 \Leftrightarrow \dfrac{q+p}{q}a = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{q}{p+q}$.

Une seule valeur convient pour a et on en déduit $b = \dfrac{p}{p+q}$ grâce à la relation précédente.

Il n'y a donc qu'un seul état stable $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifiant $a + b = 1$. C'est l'état limite indépendant de l'état initial X_0.

Source : Odyssée Term S spécialité, éd. Hatier (programme 2012)

Complément :

On considère un système qui peut se trouver dans plusieurs états, incompatibles deux à deux, et recouvrant toutes les possibilités. Il évolue par étapes successives, en changeant d'état de façon aléatoire, les probabilités de transition étant supposées constantes.

On peut représenter son évolution par un graphe probabiliste et lui associer une matrice de transition. Ce graphe et cette matrice ont les mêmes propriétés que dans le cas de deux états.

Avec les notations précédentes, le théorème suivant généralise le théorème 5 :

Théorème (admis)

Si la matrice de transition T admet une puissance n'ayant aucun coefficient nul, alors :

- il existe une **répartition stable de probabilité P** et une seule, telle que **PT = P** ;
- quelle que soit la répartition de probabilité initiale P_0, la suite (P_n) **converge vers P**.

Source : Transmaths, T°S spécialité, édition Nathan (2012)