BONUS ET MALUS EN ASSURANCE AUTOMOBILE

Notions réinvesties : matrice de transition, graphe probabiliste

Une compagnie d'assurance automobile a mis en place le système de bonus-malus suivant.

Il existe trois niveaux de cotisation annuelle :

A 455 € B 364 € C 273 €

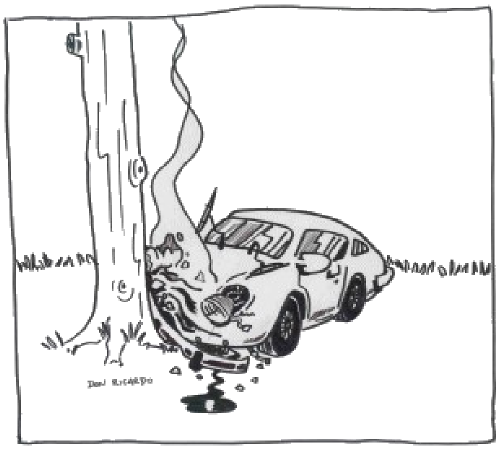
La première année, l'assuré paye le tarif B.

- S'il n'a pas été responsable d'un accident pendant une année, il passe au tarif inférieur l'année suivante, sauf s'il est déjà au tarif le plus bas ; auquel cas il y reste.
- S'il a été responsable d'un accident au cours d'une année, il passe au tarif supérieur l'année suivante, sauf s'il est déjà au tarif le plus haut ; auquel cas il y reste.

La compagnie estime à 10 % la probabilité qu'un assuré pris au hasard soit responsable d'un accident au cours d'une année.

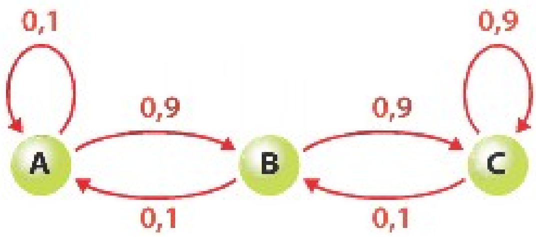
Par ailleurs, elle évalue en moyenne à 280 € par assuré ses dépenses de remboursement lors des accidents.

Cette compagnie peut-elle à long terme espérer l'équilibre financier, voire un bénéfice ?



A. Une première approche

1. Le graphe probabiliste ci-contre traduit l'évolution du tarif d'un assuré pris au hasard, d'une année à la suivante. Expliquez.



2. On suppose que pour l'année 0, les proportions d'assurés payant les tarifs A, B et C sont respectivement 30 %, 50 % et 20 %.

Représentez par un arbre probabiliste l'évolution possible du tarif d'un assuré pris au hasard, pendant les trois premières années.

3. Pour tout naturel n, on note a_n, b_n, c_n les probabilités qu'un assuré pris au hasard soit dans la catégorie A, B ou C au bout de n années. Ainsi $a_0 = 0{,}3$, $b_0 = 0{,}5$, $c_0 = 0{,}2$.

À l'aide de l'arbre, démontrez que :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}1b_n \\ b_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}1c_n \\ c_{n+1} = 0{,}9b_n + 0{,}9c_n \end{cases}.$$

4. a) À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, calculez a_n, b_n, c_n pour n variant de 0 à 20.

b) Même question en supposant $a_0 = 0{,}7$, $b_0 = 0{,}2$, $c_0 = 0{,}1$.

c) Quelle conjecture pouvez-vous émettre ?

B. La résolution du problème

1. On pose $T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$, et pour tout naturel n : $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$.

Démontrez que, pour tout naturel n, $P_{n+1} = P_n T$.

2. Démontrez par récurrence que, pour tout naturel n, $P_n = P_0 T^n$.

3. Déterminez la **répartition stable de probabilité**, c'est-à-dire la matrice $P = (a \quad b \quad c)$ telle que :

$$P\,T = P \quad \text{et} \quad a + b + c = 1.$$

Vous garderez les résultats sous forme de fraction.

4. On admet que cette répartition stable de probabilité est pratiquement atteinte à long terme. On note alors X la variable aléatoire qui indique la cotisation payée par un assuré pris au hasard.

a) Vérifiez que l'espérance de X est égale à $P\,U$, où $U = \begin{pmatrix} 455 \\ 364 \\ 273 \end{pmatrix}$. Calculez sa valeur.

b) Quelle conclusion pouvez-vous en tirer quant à l'équilibre financier de la compagnie (en ce qui concerne uniquement les accidents avec responsabilité établie) ?

Source : Transmaths, T°S spécialité, édition Nathan (2012)