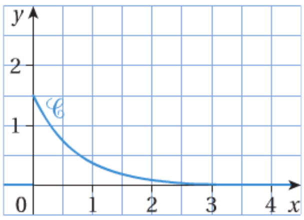
65 Cylindres

Partie A

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On rappelle que $P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt$.

La courbe donnée ci-contre représente la fonction densité associée.



a. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leqslant 1)$.

b. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Partie B. On pose $\lambda = 1{,}5$.

a. Calculer $P(X \leqslant 1)$. En donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.

b. Calculer $P(X > 2)$.

c. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante :

$$P(1 \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}173 \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

d. On pose $F(x) = \int_0^x 1{,}5\, t e^{-1{,}5t}\, dt$.

Préciser la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$. Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.

b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres est suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise. Quelle est la probabilité :

a. que les dix cylindres soient acceptés ?

b. qu'au moins un cylindre soit refusé ?

D'après *Bac S*, Antilles-Guyane, 2006.

Partie A

a) Aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction densité, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$: environ 0,75 ou 0,80 unités d'aire.

b) La densité de la loi exponentielle est $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, donc cette densité vérifie $f(0)=\lambda$.
On lit donc λ sur le graphique, c'est l'image de 0 par f : $\boxed{\lambda = 1{,}5}$.

Partie B

a) $p(X \leqslant 1) = \int_0^1 1{,}5\, e^{-1{,}5t}\, dt = [-e^{-1{,}5t}]_0^1 = \ldots = 1 - e^{-1{,}5}$.

Valeur approchée à 10^{-3} par excès : **0,777**.

b) $p(X>2) = 1 - p(X \leqslant 2) = 1 - \int_0^2 1{,}5\, e^{-1{,}5t}\, dt = \ldots = e^{-3}$

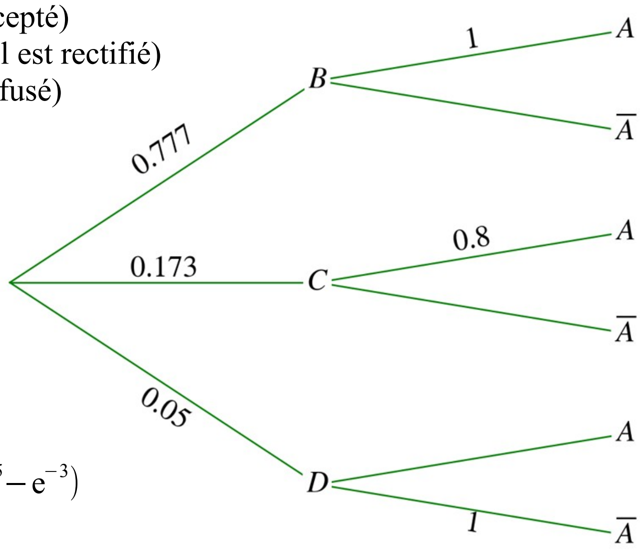
c)
$$\begin{aligned} p(1 \leqslant X \leqslant 2) &= 1 - (p(X<1) + p(X>2)) \\ &= 1 - (p(X \leqslant 1) + p(X>2)) \\ &= 1 - (1 - e^{-1{,}5} + e^{-3}) \\ &= e^{-1{,}5} - e^{-3} \\ &\approx \mathbf{0{,}173} \end{aligned}$$

d) Par définition, la limite de $F(x)$, quand x tend vers $+\infty$, est l'espérance de X, donc elle est égale à $\frac{1}{\lambda}$, soit $\frac{1}{1{,}5}$ ou encore $\boxed{\frac{2}{3}}$.

Partie C

1. a) On note les événements suivants :

B : l'écart est inférieur à 1 (donc il est accepté)
C : l'écart est compris entre 1 et 2 (donc il est rectifié)
D : l'écart est supérieur à 2 (donc il est refusé)
A : le cylindre est accepté.



D'après la partie B : $p(\mathrm{B})=1-\mathrm{e}^{-1,5}\approx 0,777$
$p(\mathrm{C})=\mathrm{e}^{-1,5}-\mathrm{e}^{-3}\approx 0,173$
$p(\mathrm{D})=\mathrm{e}^{-3}\approx 0,05$

<u>*Remarque*</u> : $p(\mathrm{B})+p(\mathrm{C})+p(\mathrm{D})=1$.

$$\begin{aligned} p(\mathrm{A}) &= p(\mathrm{B})+0,8\,p(\mathrm{C}) \\ &= p(\mathrm{X}<1)+0,8\,p(1\leqslant \mathrm{X}\leqslant 2)=1-\mathrm{e}^{-1,5}+0,8\times(\mathrm{e}^{-1,5}-\mathrm{e}^{-3}) \\ &= 1-0,2\,\mathrm{e}^{-1,5}-0,8\,\mathrm{e}^{-3} \\ &\approx 0,915 \end{aligned}$$

<u>Donc la probabilité qu'il soit accepté est d'environ 91,5 %.</u>

b) $$\begin{aligned} p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}) &= \frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})}{p(\mathrm{A})} \\ &= \frac{p(\mathrm{C})\times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{A})}{p(\mathrm{A})} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^{-1,5}-\mathrm{e}^{-3})\times 0,8}{1-0,2\,\mathrm{e}^{-1,5}-0,8\,\mathrm{e}^{-3}} \\ &\approx 0,151 \end{aligned}$$

<u>Donc, sachant qu'il est accepté, la probabilité qu'il ait subi une rectification est d'environ 15,1 %.</u>

2. a) On appelle Z la variable aléatoire qui à tout lot de 10 cylindres prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cylindres acceptés.
Le schéma de Bernoulli « prélever 1 cylindre au hasard, regarder s'il est accepté » est répété 10 fois, de façon identique et indépendante. Par conséquent, Z suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=p(\mathrm{A})$ c'est-à-dire $p\approx 0,915$.

Donc : $p(\mathrm{Z}=10)=\binom{10}{10}p^{10}(1-p)^{0}=p^{10}\approx 0,411$.

<u>La probabilité que les dix cylindres soient acceptés est d'environ 41,1 %.</u>

b) « Au moins un cylindre est refusé » est équivalent à « au maximum, 9 cylindres sont acceptés ».
$p(\mathrm{Z}\leqslant 9)=1-p(\mathrm{Z}>9)=1-p(\mathrm{Z}=10)=1-p^{10}\approx 0,589$
<u>Donc la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé est d'environ 58,9 %.</u>