LA DYNAMIQUE DES POPULATIONS (MODÈLE CONTINU)
PARTIE 1 : MODÈLES SANS INTERACTION
[CORRECTION]

I. Modèles historiques d'accroissement de la population
I.1 Modèle exponentiel de Malthus
I.1.1 Équation différentielle *y'=ay*

1. Si $y(x)=\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$ alors : $y'(x)=\mathrm{C}\times a\,\mathrm{e}^{ax}=a\times\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}=a\,y(x)$, donc **y est solution de (E)**.

2. $z(x)=y(x)\mathrm{e}^{-ax}$ donc, avec la formule de la dérivée d'un produit $(uv)'=u'v+uv'$, on obtient :
$z'(x)=y'(x)\mathrm{e}^{-ax}+y(x)\times(-a)\mathrm{e}^{-ax}$
Or $y'(x)=a\,y(x)$ donc : $z'(x)=a\,y(x)\mathrm{e}^{-ax}-a\,y(x)\mathrm{e}^{-ax}$
donc $\boldsymbol{z'(x)=0}$.

Donc il existe une constante réelle C telle que $z(x)=\mathrm{C}$.
On a : $z(x)=y(x)\mathrm{e}^{-ax}$
donc $\mathrm{C}=y(x)\mathrm{e}^{-ax}$
donc $\mathrm{C}=\dfrac{y(x)}{\mathrm{e}^{ax}}$
donc $\boldsymbol{\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}=y(x)}$.

I.2 La loi logistique de Verhulst
I.2.2 Équation différentielle *y'=ay+b*

1. $p(x)=-\dfrac{b}{a}$ donc $p'(x)=0$.

Or : $a\,p(x)+b=a\left(-\dfrac{b}{a}\right)+b=-b+b=0$

donc ***p* est une solution de (E)**.

2. $(y-p)'=y'-p'=a\,y+b-0=a\,y+b$ et $a(y-p)=a\,y-ap=a\,y-a\left(-\dfrac{b}{a}\right)=a\,y+b$

donc $\boldsymbol{(y-p)'=a(y-p)}$.

Donc $y-p$ est solution de l'équation $z'=a\,z$.
Or, d'après le théorème précédent, les solutions de cette équation sont les fonctions du type :
$z(x)=C\,\mathrm{e}^{a\,x}$ où C est une constante réelle.
Donc : $\boldsymbol{y(x)-p(x)=C\,\mathrm{e}^{a\,x}}$.

I.2.3 Étude mathématique du problème

1. Si $g(t)>\mathrm{K}$ alors :
- $\frac{g(t)}{\mathrm{K}}>1$ car $\mathrm{K}>0$. Donc $1-\frac{g(t)}{\mathrm{K}}<0$.
- $g(t)>0$ car $\mathrm{K}>0$.

Donc, puisque $a>0$: $a\,g(t)\left(1-\frac{g(t)}{\mathrm{K}}\right)<0$.

Autrement dit, puisque g est solution de (E) : $g'(t)<0$.

Donc **g est strictement décroissante : la population décroît**.

De même que si à un instant *t*, on a $g(t)\leqslant \mathrm{K}$, alors la population croît.

2. a) On notera $h=\frac{1}{g}$.

⇒ Si g est une solution strictement positive de (E) :

- h est une fonction strictement positive, comme inverse d'une fonction positive.
- $h'=\left(\frac{1}{g}\right)'$ donc : $h'=\frac{-g'}{g^2}$.

Or, g est solution de (E) donc : $h'=\frac{-a\,g\left(1-\frac{g}{\mathrm{K}}\right)}{g^2}=\frac{-a\left(1-\frac{g}{\mathrm{K}}\right)}{g}=-a\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{\mathrm{K}}\right)$.

Et : $-a\,h+\frac{a}{K}=-a\left(\frac{1}{g}\right)+\frac{a}{\mathrm{K}}=\frac{-a}{g}+\frac{a}{\mathrm{K}}=-a\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{\mathrm{K}}\right)$.

D'où : $h'=-a\,h+\frac{a}{\mathrm{K}}$.

h est donc solution strictement positive de $y'=-a\,y+\frac{a}{\mathrm{K}}$.

⇐ Si h est une solution strictement positive de $y'=-a\,y+\frac{a}{\mathrm{K}}$:

- h est une fonction strictement positive et $h=\frac{1}{g}$ donc $g=\frac{1}{h}$ est strictement positive.
- $g'=\left(\frac{1}{h}\right)'$ donc : $g'=\frac{-h'}{h^2}$.

Or, h est solution de $y'=-a\,y+\frac{a}{\mathrm{K}}$ donc :

$$g'=\frac{-\left(-a\,h+\frac{a}{\mathrm{K}}\right)}{h^2}=\frac{a\,h}{h^2}-\frac{a}{\mathrm{K}\,h^2}=\frac{a}{h}-\frac{a}{\mathrm{K}\,h^2}=\frac{a}{h}\left(1-\frac{1}{\mathrm{K}\,h}\right).$$

Et : $a\,g\left(1-\frac{g}{\mathrm{K}}\right)=a\,\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{\mathrm{K}\,h}\right)=\frac{a}{h}\left(1-\frac{1}{\mathrm{K}\,h}\right)$.

D'où : $g'=a\,g\left(1-\frac{g}{\mathrm{K}}\right)$.

g est donc solution strictement positive de $y'=a\,y\left(1-\frac{y}{\mathrm{K}}\right)$.

D'où l'équivalence qu'il fallait démontrer.

b) D'après le théorème précédent, les solutions de l'équation $y' = -a\,y + \frac{a}{\mathrm{K}}$ sont les fonctions du type :

$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} - \frac{\frac{a}{K}}{-a}$ où C est une constante réelle.

C'est-à-dire les fonctions du type $\boldsymbol{y(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} + \frac{1}{K}}$.

c) Les solutions de (E') sont les fonctions du type $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} + \frac{1}{K}$

donc d'après la question 2.a), les solutions de (E) sont les fonctions du type $y(x) = \dfrac{1}{C\,\mathrm{e}^{-ax} + \frac{1}{K}}$

ou encore $\boldsymbol{y(x) = \dfrac{K}{K\,C\,\mathrm{e}^{-ax} + 1}}$.

Si $y(0) = y_0$ alors : $\dfrac{K}{K\,C+1} = y_0$, donc $K\,C\,y_0 + y_0 = K$ donc $C = \dfrac{K - y_0}{K\,y_0}$.

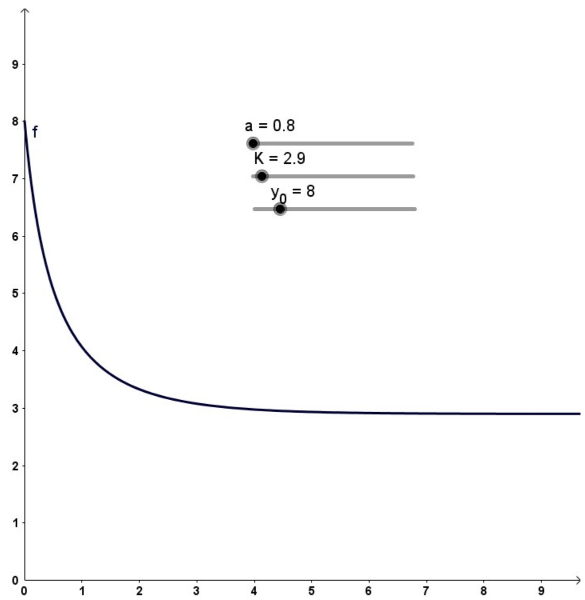
Alors : $y(x) = \dfrac{K}{K\dfrac{K-y_0}{K\,y_0}\mathrm{e}^{-ax} + 1}$ c'est-à-dire $y(x) = \dfrac{K}{\dfrac{K-y_0}{y_0}\mathrm{e}^{-ax} + 1}$

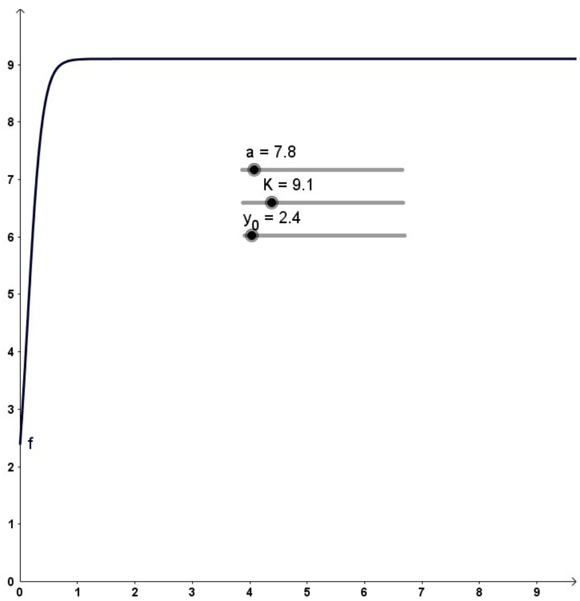
ou encore $\boldsymbol{y(x) = K\dfrac{1}{1 + \dfrac{K-y_0}{y_0}\mathrm{e}^{-ax}}}$ (ce qui est le résultat annoncé sur Wikipédia).

3. • Effet de a : plus a est grand, plus la courbe monte rapidement vers la population maximale[1].

• Effet de K : plus K est grand, plus la courbe est « haute ».
C'est normal, K est la population maximale, vers laquelle tend la population.

• Effet de y_0 : y_0 est l'ordonnée à l'origine, donc le « départ » de la courbe.
Si $y_0 < \mathrm{K}$ alors la courbe monte et se stabilise vers K .
Si $y_0 > \mathrm{K}$ alors la courbe descend et se stabilise vers K .



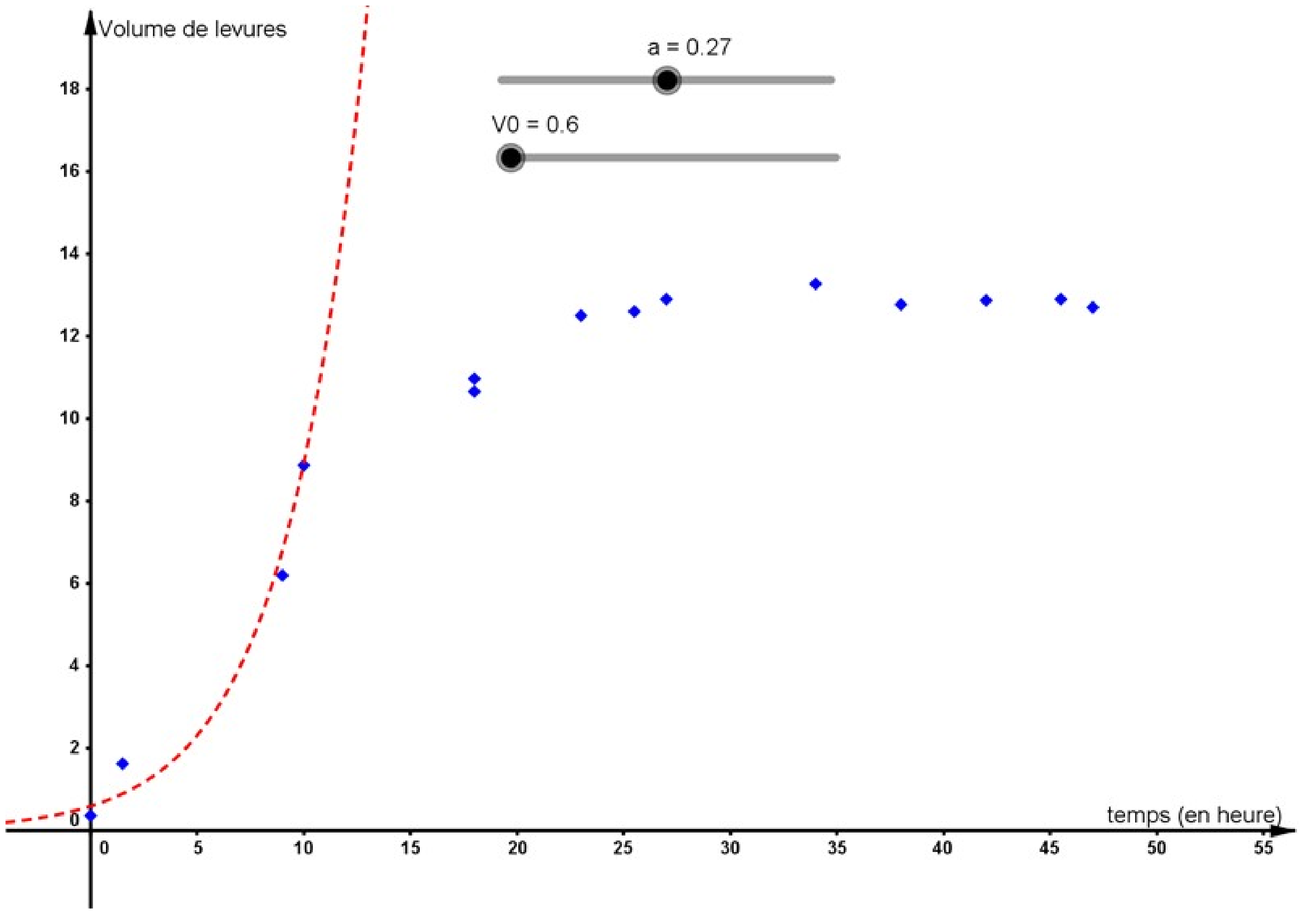


1 Ce qui est « normal », car $a = m + nb$ (voir énoncé) donc a dépend de m qui est le taux de croissance...

III. Un exemple d'utilisation : la population de levures de Gause
III.1 Modèle exponentiel de Malthus

1. a) f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'=ay$.
b) Les solutions de (E) sont les fonctions f telles que $f(t)=C\mathrm{e}^{at}$ où $C \in \mathbb{R}$.
Avec la condition $f(0)=V_0$, on obtient : $C\mathrm{e}^0=V_0$ donc $C=V_0$.
Donc l'unique solution de (E) vérifiant cette condition est la fonction f telle que $\underline{f(t)=V_0\mathrm{e}^{at}}$.

2. $\underline{a=0{,}27}$ et $\underline{V_0=0{,}6}$ semblent convenir :



Le modèle exponentiel est convenable entre 0 et 10h après l'ensemencement, mais il est totalement inadapté pour l'évolution qui suit !

III.2 Modèle logistique de Verhulst

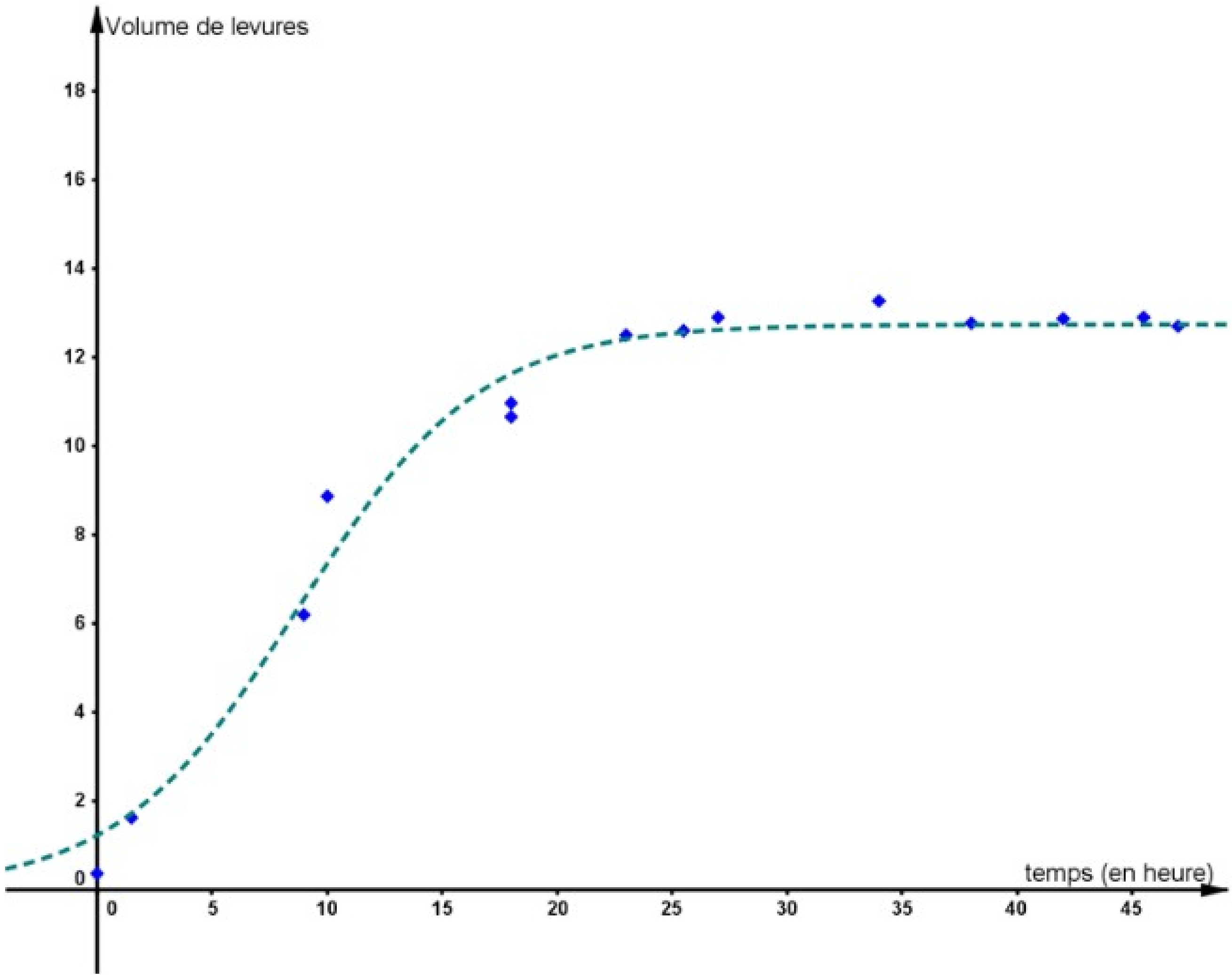
1. a) Il suffit de poser $a = \mathrm{K}\alpha$ (le calcul est d'ailleurs déjà fait à la page 5 du devoir-maison).

b) Les solutions de l'équation $y' = ay\left(1 - \dfrac{y}{\mathrm{K}}\right)$ qui vérifient $g(0) = \mathrm{V}_0$ sont, d'après le I.2.3 question 2.c) :

les fonctions y telles que $y(t) = K\dfrac{1}{1 + \dfrac{K - V_0}{V_0}\mathrm{e}^{-at}}$, c'est-à-dire $y(t) = K\dfrac{1}{1 + \dfrac{K - V_0}{V_0}\mathrm{e}^{-K\alpha t}}$.

2. Par tâtonnement :

$a = 0{,}2548$ (c'est-à-dire $\alpha = 0{,}02$ soit 2 %), $\mathrm{K} = 12{,}74$ et $\mathrm{V}_0 = 1{,}23$ semblent convenir.



Remarque : avec la calculatrice (régression avec modèle logistique dans le menu STAT, voir page 18 du devoir), on trouve $y(t) = 12{,}74\dfrac{1}{1 + 9{,}32\,\mathrm{e}^{-0{,}259t}}$*, ce qui correspond à* $\mathrm{K} = 12{,}74$*,* $a = 0{,}259$ *et* $\dfrac{\mathrm{K} - y_0}{y_0} = 9{,}32$ *ie* $y_0 = \dfrac{\mathrm{K}}{10{,}32} \approx 1{,}23$.