COMPLÉMENTS

I - Étude des variations d'une fonction polynôme

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \quad \text{(forme canonique)}$$

(Remarque : Selon le signe de $b^2 - 4ac$, on fait apparaître une identité remarquable du type "$a^2 - b^2$" et on trouve les racines du polynôme.)

Si $a > 0$. **Sur $\left[-\frac{b}{2a} ; +\infty\right[$:**

on pose $u \leq v$ avec $u \in \left[-\frac{b}{2a} ; +\infty\right[$, $v \in \left[-\frac{b}{2a} ; +\infty\right[$.

$$u \leq v$$
$$u + \frac{b}{2a} \leq v + \frac{b}{2a}$$
$$\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq \left(v + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{car } (*)$$
$$\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \leq \left(v + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$a[\ \ldots\ ] \leq a[\ \ldots\ ] \quad \text{car } a > 0$$

$(*)$
- $u \geq -\frac{b}{2a} \Rightarrow u + \frac{b}{2a} \geq 0$
- de même : $v + \frac{b}{2a} \geq 0$
- la fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$

donc $f(u) \leq f(v)$: f est croissante sur $\left[-\frac{b}{2a} ; +\infty\right[$.

En raisonnant de la même manière sur $\left]-\infty ; -\frac{b}{2a}\right]$, on montre que f est décroissante. Pour le cas $a < 0$, la démonstration est analogue.

Conclusion :

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↘		↗

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↗		↘

II. Effets des coefficients d'un polynôme sur la parabole

II.1. Coefficient du monôme de degré 0 : c

On a : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si on note g la fonction définie par : $g(x) = ax^2 + bx + c'$ $(c' \in \mathbb{R})$

alors : en posant $\lambda = c' - c$ on a

$$g(x) = f(x) + \lambda$$

Autrement dit : on obtient $\mathcal{C}_g$ par la translation de vecteur $\lambda \vec{j}$.

Plus "simplement" : $\mathcal{C}_g$ est la même courbe que $\mathcal{C}_f$, elle est juste plus ou moins "décalée verticalement".

II.2. Coefficient du monôme de degré 1 : b

II.2.1. Parabole translatée

Ici on fait varier b. On note : $\begin{array}{l} k(x) = ax^2 + b_1 x + c \\ l(x) = ax^2 + b_2 x + c \end{array}$ $(b_1 \in \mathbb{R}, b_2 \in \mathbb{R})$

Montrons que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \mu \in \mathbb{R}, \ l(x) = k(x - \lambda) + \mu$.

On pose $\lambda = \dfrac{b_1 - b_2}{2a}$.

$$l(x) = a\left[\left(x + \frac{b_2}{2a}\right)^2 + \frac{b_2^2 - 4ac}{-4a^2}\right] \quad \text{(forme canonique)}$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b_1}{2a} - \lambda\right)^2 + \frac{b_1^2 - 4ac}{-4a^2}\right] + \mu$$

où $\mu = a\dfrac{b_2^2 - 4ac}{-4a^2} - a\dfrac{b_1^2 - 4ac}{-4a^2}$

ie $\mu = \dfrac{b_2^2 - b_1^2}{-4a}$

On a bien : $l(x) = k(x - \lambda) + \mu$

puisque (forme canonique) $k(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b_1}{2a}\right)^2 + \dfrac{b_1^2 - 4ac}{-4a^2}\right]$

Donc $\mathcal{C}_l$ est l'image de $\mathcal{C}_k$ par la translation de vecteur $\lambda \vec{i} + \mu \vec{j}$.

(en effet, la composée de la translation de vecteur $\lambda \vec{i}$ et de la translation de vecteur $\mu \vec{j}$ est la translation de vecteur $\lambda \vec{i} + \mu \vec{j}$)

II.2.2. Lieu des sommets

On a vu au II.2.1. que changer b "ne change pas" la courbe (translation). Mais quel lieu suivent les sommets des paraboles construites lorsque b varie ? Autrement dit, quel est cet ensemble : $\left\{\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right), b \in \mathbb{R}\right\}$.

On note f_0 la fonction polynôme lorsque $b=0$: $f_0(x) = ax^2 + c$.

On peut montrer que le lieu des sommets lorsque b varie est "la courbe $\mathcal{C}_{f_0}$ à l'envers".

II.2.2. a) Ecriture plus simple de l'ensemble des coord. des sommets

Montrons que le lieu des sommets (b varie) est égal à :

$$\left\{(x ; -ax^2+c), x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Autrement dit : $\left\{\left(\frac{-b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right), b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(x ; -ax^2+c), x \in \mathbb{R}\right\}$.

($\Rightarrow$) Soit $M \in \left\{\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right), b \in \mathbb{R}\right\}$.

On a : $-a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + c = -\frac{b^2}{4a} + c = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

donc $M \in \left\{(x ; -ax^2+c), x \in \mathbb{R}\right\}$.

($\Leftarrow$) Soit $M \in \left\{(x ; -ax^2+c), x \in \mathbb{R}\right\}$

On note $b = -2ax$. Alors :

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a} = c - \frac{(-2ax)^2}{4a} = c - \frac{4a^2x^2}{4a} = c - ax^2$$

donc $M \in \left\{\left(\frac{-b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right), b \in \mathbb{R}\right\}$

II.2.2.b) Symétrie axiale $\left(\text{d'axe d'équation } y=c\right)$

On a vu que $\left\{\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right), b\in\mathbb{R}\right\} = \left\{(x; -ax^2+c), x\in\mathbb{R}\right\}$.

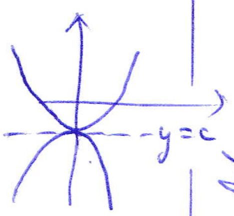
On note $E = \{(x; -ax^2+c), x\in\mathbb{R}\}$

et S la courbe symétrique de $\mathcal{C}_{f_0}$ par rapport à la droite d'équation $y=c$.

Montrons que $E=S$.

(⇐) Soit $M'\in S$. Alors : $\exists M\in\mathcal{C}_{f_0}$ / M' est le sym. de M par rapport à $y=c$

donc : $M(x; ax^2+c)$ avec, en posant H le projeté orth. de M sur la droite d'équ. $y=c$: H milieu de $[MM']$.



Donc :
- $x_H = \frac{x_M + x_{M'}}{2}$ i.e. $x_M = \frac{x_M + x_{M'}}{2}$ i.e. $x_{M'} = x_M$
- $y_H = \frac{y_M + y_{M'}}{2}$ i.e. $c = \frac{y_M + y_{M'}}{2}$ i.e. $y_{M'} = 2c - y_M$

  i.e. $y_{M'} = 2c - (ax_M^2 + c)$ car $M\in\mathcal{C}_{f_0}$

  i.e. $y_{M'} = -ax_M^2 + c$

D'où $M'\in E$.

(⇒) Soit $M'\in E$: $M'(x; -ax^2+c)$.

On note : $M(x; 2c-(-ax^2+c))$ i.e. $M(x; ax^2+c)$

En notant $H(x;c)$, on montre que : H milieu de $[MM']$.

En effet :
- $\frac{x_M + x_{M'}}{2} = \frac{x+x}{2} = x = x_H$
- $\frac{y_M + y_{M'}}{2} = \frac{ax^2+c+(-ax^2+c)}{2} = c = y_H$

Donc $M'\in S$.

II.2.2.c) Symétrie centrale (centre $w(0;c)$)

On a vu que $\left\{\left(-\frac{b}{2a};f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right), b\in\mathbb{R}\right\} = \left\{(x;-ax^2+c), x\in\mathbb{R}\right\}$.

On note : $E = \{(x;-ax^2+c), x\in\mathbb{R}\}$

et S la courbe symétrique de $\mathcal{C}_{f_0}$ par rapport à w.

Montrons que $E = S$.

($\Leftarrow$) Soit $M'\in S$. Alors : $\exists M\in\mathcal{C}_{f_0}$ / M' est le sym. de M par rapport à w

donc $M(x;ax^2+c)$ et w milieu de $[MM']$:

- $x_w = \frac{x_M+x_{M'}}{2}$ i.e. $0 = \frac{x_M+x_{M'}}{2}$ i.e. $x_{M'} = -x_M$
- $y_w = \frac{y_M+y_{M'}}{2}$ i.e. $c = \frac{ax_M^2+c+y_{M'}}{2}$ i.e. $y_{M'} = -ax_M^2+c$
  $= -a(-x_{M'})^2+c$

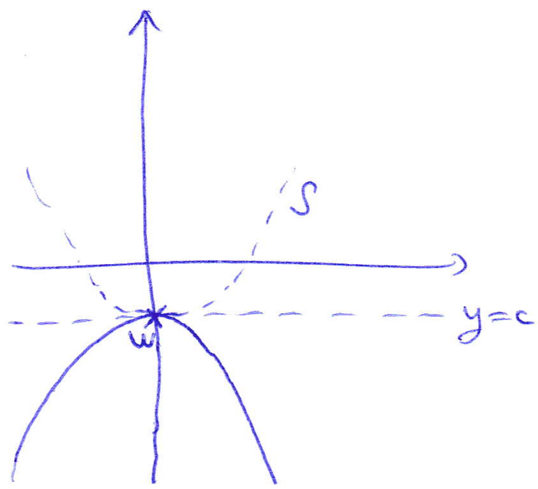
D'où : $M'\in E$.

($\Rightarrow$) Soit $M'\in E$: $M'(x;-ax^2+c)$.

On note : $M(-x;2c-(-ax^2+c))$ i.e. $M(-x;ax^2+c)$.

- $\frac{x_M+x_{M'}}{2} = \frac{-x+x}{2} = 0 = x_w$
- $\frac{y_M+y_{M'}}{2} = \frac{ax^2+c+(-ax^2+c)}{2} = c = y_w$

donc w est le milieu de $[MM']$: $M'\in S$.



II.3. Coefficient du monôme de degré 2 : a.

II.3.1 Par homothétie

Ici on fait varier a. On note : $k(x) = ax^2 + bx + c$

$\ell(x) = a'x^2 + bx + c$ $\quad (a \in \mathbb{R}^*, a' \in \mathbb{R}^*)$

a) On montrera que $\mathcal{C}_\ell$ est l'image de $\mathcal{C}_k$ par l'homothétie de centre $\Omega(0;c)$ et de rapport $k = \frac{a}{a'}$.

b) Remarque : on peut aussi montrer que $\{\Omega\} = (SS') \cap (FF')$ où S et S' sont les sommets de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_\ell$ et F et F' sont les foyers de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_\ell$.

II.3.1 a) On note : $E = \{M' ; \exists M \in \mathcal{C}_k, \overrightarrow{\Omega M'} = \frac{a}{a'}\overrightarrow{\Omega M}\}$.

Montrons que $\mathcal{C}_g = E$.

($\subset$) Soit $M' \in E$: $\exists M \in \mathcal{C}_k, \overrightarrow{\Omega M'} = \frac{a}{a'}\overrightarrow{\Omega M}$.

Alors : $\bullet\ x_{M'} = \frac{a}{a'} x_M$

$\bullet\ y_{M'} - c = \frac{a}{a'}(y_M - c)$

donc $y_{M'} = \frac{a}{a'}(a x_M^2 + b x_M + c - c) + c$

$y_{M'} = \dfrac{a^2 x_M^2 + ab x_M}{a'} + c$

Mq $M' \in \mathcal{C}_g$: $a' x_{M'}^2 + b x_{M'} + c = a'\left(\frac{a}{a'} x_M\right)^2 + b\left(\frac{a}{a'} x_M\right) + c$

$= \dfrac{a^2 x_M^2 + ab x_M}{a'} + c$

$= y_{M'}$ (CQFD)

($\supset$) Soit $M' \in \mathcal{C}_g$. On pose : $x_M = \frac{a'}{a} x_{M'}$

et $y_M = \dfrac{y_{M'} - c + \frac{ac}{a'}}{a} a'$

On obtient alors : $\bullet\ x_{M'} = \frac{a}{a'} x_M$

$\bullet\ y_{M'} = \frac{a}{a'} y_M + c - \frac{ac}{a'}$

d'où $y_{M'} - c = \frac{a}{a'}(y_M - c)$

D'où $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{a}{a'}\overrightarrow{\Omega M}$ et alors $M' \in E$.

II.3.1.b) D'après le cours (non montré ici) :

- $F\left(-\frac{b}{2a} ; \frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$ et $F'\left(-\frac{b}{2a'} ; \frac{1-b^2+4a'c}{4a'}\right)$
- $S\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{b^2}{4a}+c\right)$ et $S'\left(-\frac{b}{2a'} ; \frac{-b^2}{4a'}+c\right)$

* Equation de (FF') :

$$\frac{y_{F'}-y_F}{x_{F'}-x_F} = \left(\frac{1-b^2+4a'c}{4a'} - \frac{1-b^2+4ac}{4a}\right) \div \left(-\frac{b}{2a'}+\frac{b}{2a}\right)$$

$$= \frac{a-ab^2+\cancel{4aa'c}-a'+a'b^2-\cancel{4aa'c}}{4a'a} \div \frac{-ab+ba'}{2aa'}$$

$$= \frac{b^2(a'-a)-(a'-a)}{4\cancel{a'}\cancel{a}} \times \frac{2\cancel{a}\cancel{a'}}{(a'-a)b}$$

$$= \frac{b^2-1}{2} \times \frac{1}{b}$$

$$= \frac{b^2-1}{2b}$$

et $\frac{b^2-1}{2b} \times \left(-\frac{b}{2a}\right) + ? = \frac{1-b^2+4ac}{4a}$.

donc $? = \frac{1-b^2+4ac}{4a} + \frac{b(b^2-1)}{4ab} = \frac{\cancel{b}(\cancel{1}\cancel{-b^2}+\cancel{4}\cancel{a}c+\cancel{b^2}\cancel{-1})}{\cancel{4}\cancel{a}\cancel{b}}$

$= c$

donc : $\underline{(FF') : y = \frac{b^2-1}{2b}x + c}$.

* Equation de (SS') :

$$\frac{y_{S'}-y_S}{x_{S'}-x_S} = \left(\frac{-b^2}{4a'}+\cancel{c}+\frac{b^2}{4a}-\cancel{c}\right) \div \left(\frac{-b}{2a'}+\frac{b}{2a}\right) = \frac{-ab^2+a'b^2}{4\cancel{a}\cancel{a'}} \times \frac{2\cancel{a}\cancel{a'}}{-ab+ba'}$$

$$= \frac{b\,\cancel{(-ab+a'b)}}{2\,\cancel{(-ab+ba')}} = \frac{b}{2}$$

et $\quad \frac{b}{2}\times\left(-\frac{b}{2a}\right)+\,?\,=-\frac{b^2}{4a}+c$

donc $\quad ?=-\cancel{\frac{b^2}{4a}}+c+\cancel{\frac{b^2}{4a}}=c$

donc $\quad \underline{(SS') : y=\frac{b}{2}x+c}$

* Intersection de (SS') et (FF') :

$$\frac{b}{2}x+c=\frac{b^2-1}{2b}x+c \iff x\Big(\underbrace{\frac{b}{2}-\frac{b^2-1}{2b}}_{\frac{1}{2b}}\Big)=0$$

$$\iff x=0 \text{ ou } \frac{1}{2b}=0$$

$$\iff x=0$$

et $\frac{b}{2}\times 0+c=c$ donc : $(0;c)$ est l'int. de (SS') et (FF').

II.3.2 Lieu des sommets

* 1er cas : $b\neq 0$

Montrons que $\left\{\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right),\ a\in\mathbb{R}\right\}=(d)\setminus\{(0;c)\}$

où $(d) : y=\frac{b}{2}x+c$.

($\Rightarrow$) Soit $M\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{b^2}{4a}+c\right)$. Alors : $\frac{b}{2}\times\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=-\frac{b^2}{4a}+c$

donc $M\in(d)$. (avec $-\frac{b}{2a}\neq 0$ donc $M\neq(0;c)$)

($\Leftarrow$) Soit $(x;y)\in(d)\setminus\{(0;c)\}$. Alors $y=\frac{b}{2}x+c$ avec $x\neq 0$ (par l'absurde).

$x\neq 0$. On pose $a=-\frac{b}{2x}$. Alors $x=-\frac{b}{2a}$

et $y=\frac{b}{2}\times\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=-\frac{b^2}{4a}+c=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

donc $(x;y)=\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ donc $M\in\{\ldots\}$.

★ **2^e cas : $b=0$**

L'ensemble des sommets est :

$$\left\{\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right), a\in\mathbb{R}\right\} = \left\{(0 ; f(0)), a\in\mathbb{R}\right\}$$
$$= \{(0 ; c)\}$$

donc le lieu des sommets est le point $(0;c)$

Rmq : c'est aussi le sommet car $-\frac{b}{2a}=0$ et $-\frac{b^2}{4a}+c=0+c=c$