FONCTIONS DE RÉFÉRENCE. PARTIE 4 : FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

COMPLEMENTS POUR LE PROFESSEUR

S O M M A I R E

On considère une fonction polynôme f définie par $f(x)=ax^2+bx+c$.
On note C sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I. Etude des variations d'une fonction polynôme

Démonstration (niveau Seconde) des résultats suivants :

- Une fonction polynôme admet un extremum en $\frac{-b}{2a}$.
- Si $a>0$, elle est décroissante puis croissante.
- Si $a<0$, elle est croissante puis décroissante.

II. Effets des coefficients d'un polynôme sur la parabole

II.1. Coefficient du monôme de degré 0 : c

En changeant c par c' , on obtient une nouvelle courbe C' qui est la translatée de la courbe C par la translation de vecteur $(c'-c)\vec{j}$.
La nouvelle courbe est la donc « la même » que C , elle est juste « plus ou moins décalée verticalement ».

II.2. Coefficient du monôme de degré 1 : b

II.2.1. Parabole translatée

En changeant b par b' , on obtient une nouvelle courbe C' qui est la translatée de la courbe C par la translation de vecteur $\lambda\vec{i}+\mu\vec{j}$, où $\lambda=\frac{b-b'}{2a}$ et $\mu=\frac{b'^2-b^2}{-4a}$
La nouvelle courbe est la donc « la même » que C , elle est juste « plus ou moins décalée verticalement et horizontalement ».

II.2.2. Lieu des sommets

II.2.2.a) Ecriture plus simple du lieu des sommets

On réécrit le lieu des sommets, en montrant que : $\left\{\left(-\frac{b}{2a};f(-\frac{b}{2a})\right),b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(x;-ax^2+c\right),x\in\mathbb{R}\right\}$.

II.2.2.b) Symétrie axiale (d'axe d'équation y = c)

On montre que le lieu des sommets est la symétrique de C_0 par rapport à la droite d'équation $y=c$,
où C_0 est la courbe représentative de f lorsque $b=0$: $f_0(x)=ax^2+c$.
Autrement dit, le lieu des sommets (lorsque b varie) est une parabole ! Et même la symétrique d'une des paraboles observées...

II.2.2.c) Symétrie centrale (de centre (0;c))

On montre que le lieu des sommets est aussi la symétrique de C_0 par rapport au point $(0;c)$,
où C_0 est la courbe représentative de f lorsque $b=0$: $f_0(x)=ax^2+c$.

II.3. Coefficient du monôme de degré 2 : *a*

II.3.1. Par homothétie

En changeant a par a', on obtient une nouvelle courbe C' qui est obtenue par homothétie de la courbe C. La rapport de cette homothétie est $\frac{a}{a'}$ et son centre est $(0;c)$.

La nouvelle courbe est la donc « la même » que C, elle est juste « plus ou moins incurvée » et passe toujours par $(0;c)$.

II.3.2. Lieu des sommets

On montre que :

- si $b\neq 0$, le lieu des sommets est la droite d'équation $y=\frac{b}{2}x+c$ privée du point $(0;c)$.
- si $b=0$, le lieu des sommets est le point $(0;c)$.

Autrement dit, le lieu des sommets (lorsque *b* varie) est une droite oblique ou un point.