2nde VECTEURS - Démonstrations

I.1.1 M' est l'image de M par $t_{\vec{AB}}$ $\Leftrightarrow$ ABM'M est un parallélogramme

M' image de M par $t_{\vec{AB}}$ $\Leftrightarrow$ [AM'] et [BM] se coupent en leur milieu

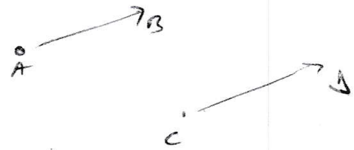
$\Leftrightarrow$ ABM'M est un parallélogramme

I.2.1 $t_{\vec{AB}} = t_{\vec{CD}}$ $\Leftrightarrow$ ABDC parallélogramme

($\Rightarrow$) Si $t_{\vec{AB}} = t_{\vec{CD}}$ alors $t_{\vec{AB}}(A) = t_{\vec{CD}}(A)$

ie $B = t_{\vec{CD}}(A)$

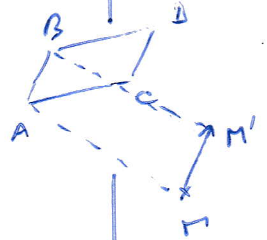
ie ABDC parallélogramme



($\Leftarrow$) Si ABDC parallélogramme : (AB) // (CD) et AB = CD.

Soit M point du plan et $M' = t_{\vec{AB}}(M)$: (mq $M' = t_{\vec{CD}}(M)$.)

MM'BA parallélogramme donc AB = MM' et (AB) // (MM').



Or AB = CD et (AB) // (MM')

donc CD = MM' et (MM') // (CD)

d'où CDM'M parallélogramme.

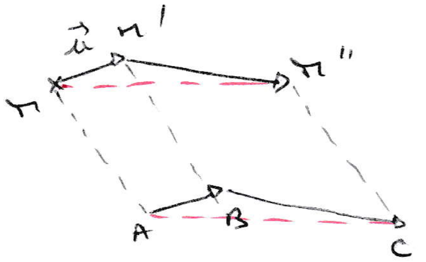
d'où $M' = t_{\vec{CD}}(M)$.

II.1 L'enchaînement de 2 translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation.

Il existe 3 points A, B, C tels que : $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$.

(en effet, il suffit de poser A quelconque, puis $B = t_{\vec{u}}(A)$ et $C = t_{\vec{v}}(B)$).

On note M un point du plan, et : $M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $M'' = t_{\vec{v}}(M')$.



Alors : MM'BA parallélogramme et M'M''CB parallélog.

donc : • (MA) // (M'B) et (M'B) // (M''C)

donc (MA) // (M''C)

• MA = M'B et M'B = M''C

donc MA = M''C

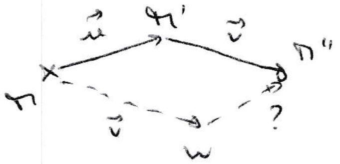
or un quadrilatère (non croisé) qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme donc MM''CA parallélog.

donc $M'' = t_{\vec{AC}}(M)$. [Rmq : on a montré que $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$]

II.2 Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 3 vecteurs du plan.

a) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

Soit M point du plan. On note : $M'=t_{\vec{u}}(M)$ et $M''=t_{\vec{v}}(M')$



On note $W=t_{\vec{v}}(M)$.

(Mq $t_{\vec{u}}(W)=M''$).

Par définition : $\overrightarrow{M'M''}=\overrightarrow{MW}$

donc $MM'M''W$ parallélogramme

donc $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{WM''}$

donc $t_{\overrightarrow{MM'}}(W)=M''$

Or $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ d'où $t_{\vec{u}}(W)=M''$.

Autrement dit : pour tout M du plan :

$$t_{\vec{u}}\left(t_{\vec{v}}(M)\right)=t_{\vec{v}}\left(t_{\vec{u}}(M)\right) \quad \text{ie} \quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}.$$

b) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}$

On note $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$: $\vec{u}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

et d'après le a) : $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}$.

c) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

On note $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{CD}$

$$\left.\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AD}\\ \text{et } \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) &= \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AD}\end{aligned}\right\} \text{d'où le résultat.}$$

II.3 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme

$ABDC$ parall. $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ (à montrer rapidement ds le sens $\Leftarrow$, le sens $\Rightarrow$ étant évident)

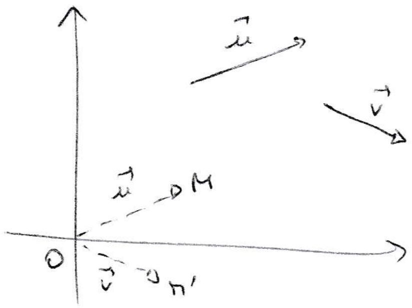
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

III.1 Deux vecteurs sont égaux $\Leftrightarrow$ ils ont mêmes coord. dans un repère du plan

Soit $(O; I; J)$ un repère du plan.

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ 2 vecteurs dans ce repère.

On note $M = t_{\vec{u}}(O)$ et $M' = t_{\vec{v}}(O)$



Alors : $M(x;y)$ et $M'(x';y')$. et $\vec{u} = \vec{OM}$
$\vec{v} = \vec{OM'}$

On a : $x = x'$ et $y = y'$

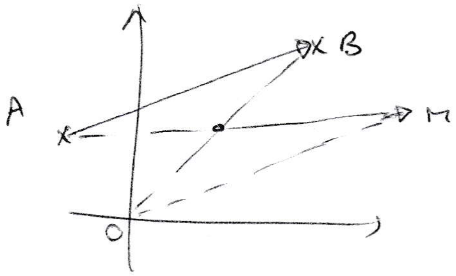
$\Leftrightarrow M = M'$

$\Leftrightarrow \vec{OM} = \vec{OM'}$ (Rmq : $\Leftarrow$ facile car : $\vec{MM'} = \vec{MO} + \vec{OM'}$
$= \vec{MO} + \vec{OM}$
$= \vec{0}$)

$\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

III.2 Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

Alors : $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.



On note $M = t_{\vec{AB}}(O)$.

$\vec{AB} = \vec{OM}$ donc $[OB]$ et $[AM]$ ont le même milieu :

- $\dfrac{x_O + x_B}{2} = \dfrac{x_A + x_M}{2}$ ie $x_B = x_A + x_M$
  ie $x_M = x_B - x_A$
- $\dfrac{y_O + y_B}{2} = \dfrac{y_A + y_M}{2}$ ie $y_B = y_A + y_M$
  ie $y_M = y_B - y_A$.

III.3 Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$

a) $-\vec{u}$ a pour coord : $(-x; -y)$

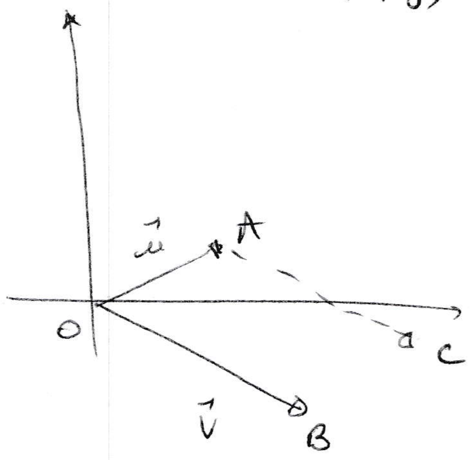
On note $\vec{u} = \vec{OA}$. Alors $-\vec{u} = \vec{AO}$

donc coord. de $-\vec{u}$: $(x_O - x_A; y_O - y_A)$ ie $(-x_A; y_A)$
ie $(-x; -y)$

b) $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coord : $(x + x'; y + y')$

$\longrightarrow$

$\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$



On note $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$

$\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

et $C = t_{\vec{v}}(A)$ ie $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$

Alors : • $x_C - x_A = x_B - x_O$

ie $x_C = x_B + x_A$

$x_C = x_A + x_B$

$x_C = x + x'$

• De même :

$y_C = y + y'$.

Donc $\overrightarrow{OC}(x+x';y+y')$.

Or, puisque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

ie $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}$

d'où : $\vec{u} + \vec{v}\,(x+x';y+y')$.

IV. Soient $(k,k') \in \mathbb{R}^2$ et 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$

a) $k\vec{u} + k\vec{v} = k(\vec{u}+\vec{v})$ $\qquad k\vec{u} + k\vec{v} : (kx+kx' ; ky+ky')$

ie $(k(x+x') ; k(y+y'))$

ie k fois les coord. de $\vec{u}+\vec{v}$.

b) $k\vec{u} + k'\vec{u}$ Idem : $kx + k'x = (k+k')x$ etc.

c) $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$ Idem : $k(k'x) = (kk')x$ etc.

d) $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow [k=0$ ou $\vec{u} = \vec{0}]$

1ère démo : $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow kx = 0$ et $ky = 0$

$\Leftrightarrow (k=0$ ou $x=0)$ et $(k=0$ ou $y=0)$

$\Leftrightarrow k=0$ ou $k=y=0$ ou $k=x=0$ ou $x=y=0$

$\Leftrightarrow k=0$ ou $k=y=0$ ou $k=x=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$ (à vérifier ds les 2 sens, facile)

2e version : Si $k \neq 0$: $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow kx = 0$ et $ky = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$

$\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ $\qquad$ d'où le résultat...

V.1 Soient A, B, C trois points.

A, B, C alignés $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires

$\star$ Si $A=B$ ou $B=C$:

alors : $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires puisque le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs. De plus, A, B, C alignés...

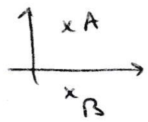
$\star$ Si $A=C$: alors $\vec{AB} = \vec{CB} = -\vec{BC}$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont col. De plus, A, B, C alignés...

On vient de démontrer l'équivalence lorsque $A=B$ ou $B=C$ ou $A=C$.

Si A, B et C sont 2 à 2 distincts :

$\Rightarrow$

1er cas : $x_A = x_B$



Alors $x_C = x_A = x_B$ puisque A, B, C alignés (car sinon $C=B$)

Donc : $y_B - y_A = \underbrace{\dfrac{y_B - y_A}{y_C - y_B}}_{k}(y_C - y_B)$
et $x_B - x_A = k(x_C - x_B)$
donc $\vec{AB} = k\vec{BC}$.

2e cas : $x_C = x_B$ De même ...

3e cas : $y_B = y_C$ Alors $x_B \neq x_C$ (car sinon $B=C$)

Donc : $x_B - x_A = \underbrace{\dfrac{x_B - x_A}{x_C - x_B}}_{k}(x_C - x_B)$
et $y_B = y_A$ (pts alignés) donc $y_B - y_A = k(y_C - y_B)$
$\vec{AB} = k\vec{BC}$

4e cas : $x_A \neq x_B$ et $x_C \neq x_B$ et $y_B \neq y_C$.

A, B, C alignés donc $(AB) \parallel (BC)$: $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$

donc on a : $\dfrac{y_B - y_A}{y_C - y_B} = \dfrac{x_B - x_A}{x_C - x_B}$, que l'on note k.

On a bien : $x_B - x_A = k(x_C - x_B)$
et $y_B - y_A = k(y_C - y_B)$
d'où $\vec{AB} = k\vec{BC}$.

($\Leftarrow$) $\vec{AB} = k\vec{BC}$

donc $\begin{cases} x_B - x_A = k(x_C - x_B) \\ y_B - y_A = k(y_C - y_B) \end{cases}$

De plus, $k \neq 0$ car sinon $\vec{AB} = \vec{0}$ donc $A = B$ ...

Donc : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\cancel{k}(y_C - y_B)}{\cancel{k}(x_C - x_B)} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$

donc $(AB) \parallel (BC)$.

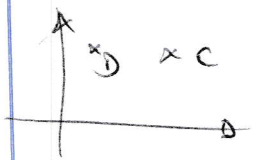
donc A, B, C alignés.

V.2. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ colinéaires

Si $A = B$ ou $A = D$ ou $A = C$ ou $B = C$ ou $B = D$ ou $C = D$: trivial.
ou déjà démontré ... (V.1)

Si les points A, B, C et D sont 2 à 2 distincts :

($\Rightarrow$) 1er cas : $y_D = y_C$ (alors $x_D \neq x_C$)



Alors $y_A = y_B = y_C = y_D$

donc $y_B - y_A = \dfrac{x_B - x_A}{x_D - x_C}(y_D - y_C)$

et $x_B - x_A = \dfrac{x_B - x_A}{x_D - x_C}(x_D - x_C)$

d'où $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ col.

2e cas : $y_D \neq y_C$.

Soit $x_A = x_B$ ou $x_C = x_D$ ... (trivial)

Soit $x_A \neq x_B$ et $x_C \neq x_D$ donc :

$\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$ donc $x_B - x_A = \dfrac{y_B - y_A}{y_D - y_C}(x_D - x_C)$

et $y_B - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{y_D - y_C}(y_D - y_C)$

d'où $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ col.

($\Leftarrow$) $\vec{AB} \neq \vec{0}$ et $\vec{CD} \neq \vec{0}$ car sinon $A = B$ ou $C = D$ ... donc $\vec{AB} = k\vec{CD}$.

$\begin{cases} x_B - x_A = k(x_D - x_C) \\ y_B - y_A = k(y_D - y_C) \end{cases}$ donc si $k \neq 0$: $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} \Rightarrow (AB) \parallel (CD)$

si $k = 0$: $A = B$ (impossible)

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ tq $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ col. $\Leftrightarrow$ $xy' - yx' = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{u} = k\vec{v}$ donc $x = kx'$ et $y = ky'$

donc $xy' - yx' = x\dfrac{y}{k} - y\dfrac{x}{k} = 0$

(Rmq : $k \neq 0$ car sinon $\vec{u} = \vec{0}$)

$\Leftarrow$ $xy' - yx' = 0$ donc $xy' = yx'$.

or $\vec{u} \neq \vec{0}$ donc $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

1er cas : $x \neq 0$

Alors $y' = \dfrac{yx'}{x}$ donc $y' = \dfrac{x'}{x} y$ et $x' = \dfrac{x'}{x} x$

donc $\vec{v} = k\vec{u}$ où $k = \dfrac{x'}{x}$.

2e cas : $y \neq 0$

Alors $x' = \dfrac{xy'}{y}$ donc $x' = \dfrac{y'}{y} x$ et $y' = \dfrac{y'}{y} y$

donc $\vec{u} = k\vec{v}$ où $k = \dfrac{y'}{y}$.