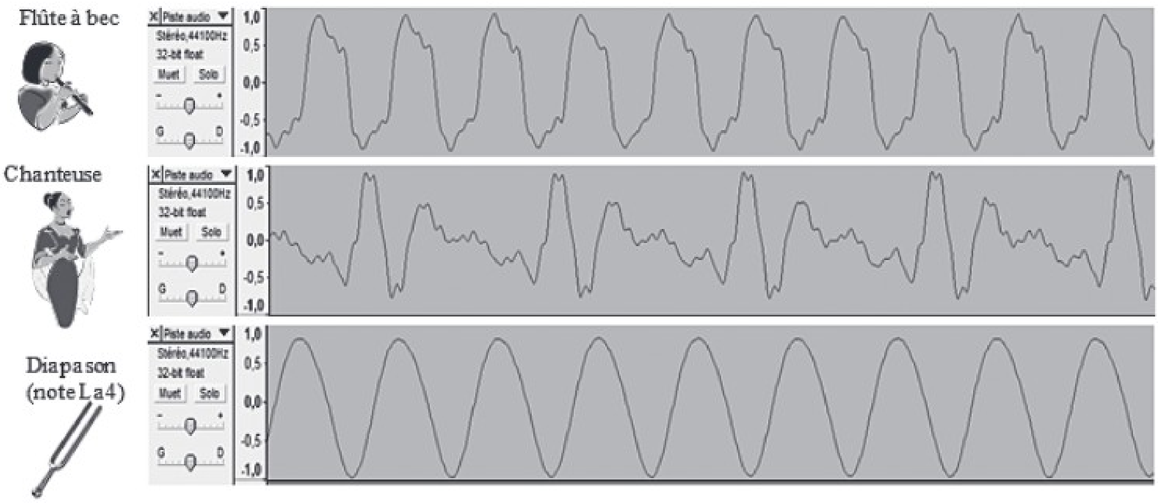
FONCTIONS COSINUS ET SINUS



En analyse, les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique.

Un signal périodique de fréquence f et de forme quelconque peut être obtenu en ajoutant à une sinusoïde de fréquence f (fondamentale), des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de f.

De même, on peut décomposer toute onde périodique en une somme de sinusoïdes.

Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier[1] en 1822, mais il fallut un siècle pour que les analystes dégagent les outils d'étude adaptés, dont une théorie de l'intégrale pleinement satisfaisante.

Elles font encore actuellement l'objet de recherches actives pour elles-mêmes, et ont suscité plusieurs branches nouvelles : analyse harmonique, théorie du signal, ondelettes, etc.

Les séries de Fourier se rencontrent principalement dans la décomposition de signaux périodiques, dans l'étude des courants électriques, des ondes cérébrales, dans la synthèse sonore, le traitement d'images, la propagation de la chaleur, etc.

Un signal en dents de scie est une sorte d'onde non-sinusoïdale que l'on rencontre en électronique, ou dans le domaine du traitement du signal. Il est aussi utilisé pour l'affichage sur des écrans de télévision.

Il tire son nom de sa représentation graphique qui se rapproche des dents d'une scie.

Source : Wikipedia (texte), www.academie-en-ligne.fr (image).

1 mathématicien et physicien français né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris

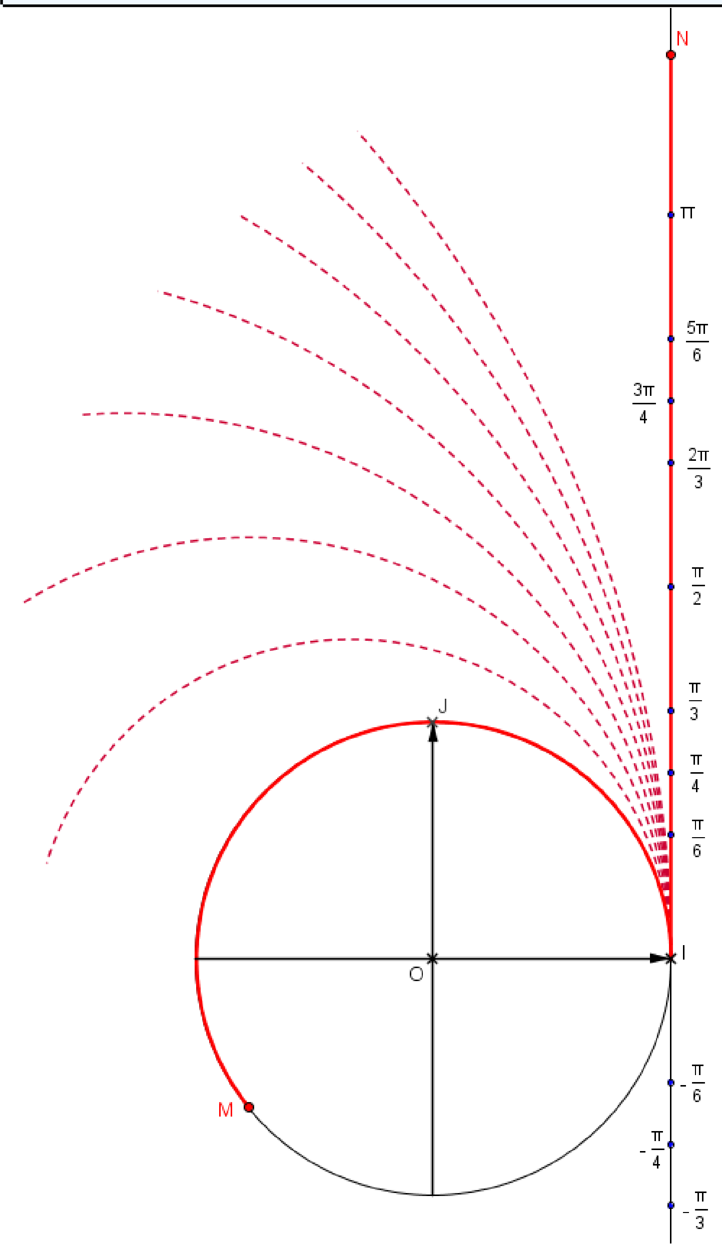
I. Rappels

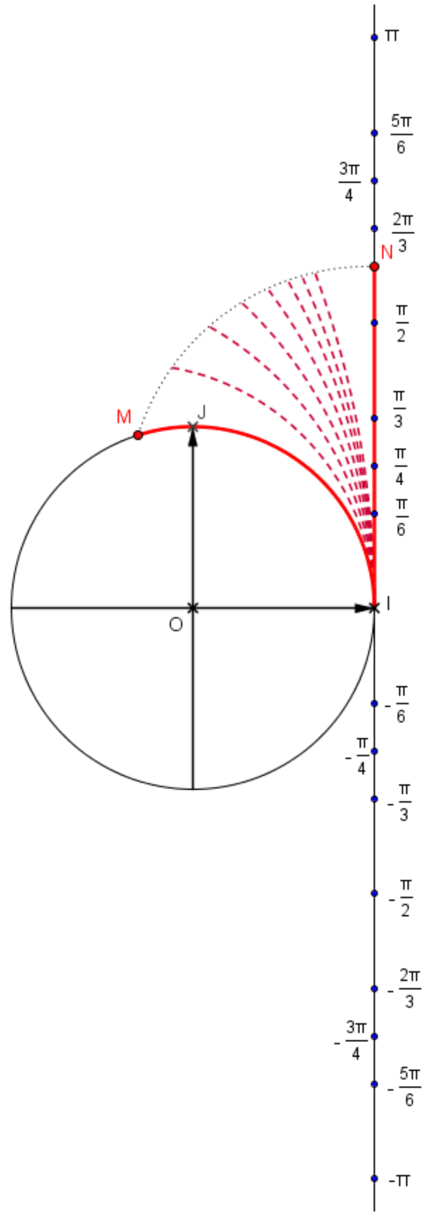
I.1 Cercle trigonométrique et « enroulement de la droite numérique »

DÉFINITION.
« Le » ***cercle trigonométrique*** est un cercle de centre O, de rayon 1, orienté dans le ***sens direct*** (ou ***sens trigonométrique***), c'est-à-dire dans le sens inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre.

Remarque : ce sens a été choisi par les astronomes parce qu'il correspond à la rotation de la Terre ; c'est-à-dire le sens dans lequel les étoiles semblent défiler pour un observateur sur Terre.

DÉFINITIONS.
On considère le cercle trigonométrique de centre O et le repère orthonormé (O ; $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$).
On considère la droite (d) tangente en I à la droite (OI), et on munit cette droite d'un repère (I ; $\overrightarrow{IK}$) tel que $IK=1$. Cette droite graduée s'appelle ***droite numérique*** (elle représente ℝ).
A tout nombre réel x on fait correspondre le point N d'abscisse x dans le repère (I ; $\overrightarrow{IK}$) de (d).
Par enroulement de la droite (d) autour du cercle trigonométrique, on obtient un unique point M sur ce cercle. On appelle ***mesure en radian*** de l'angle $\widehat{IOM}$ la longueur de l'arc IM .





Exemples : • un angle qui mesure 360° mesure 2π radians ;

• un angle qui mesure 60° mesure $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ radians ;

• un angle qui mesure 1 radian mesure $\frac{180}{\pi}\approx 57{,}3$ °.

degré	*radian*
180	π
?	1

Remarque : radian vient du latin *radius*, qui signifie rayon.

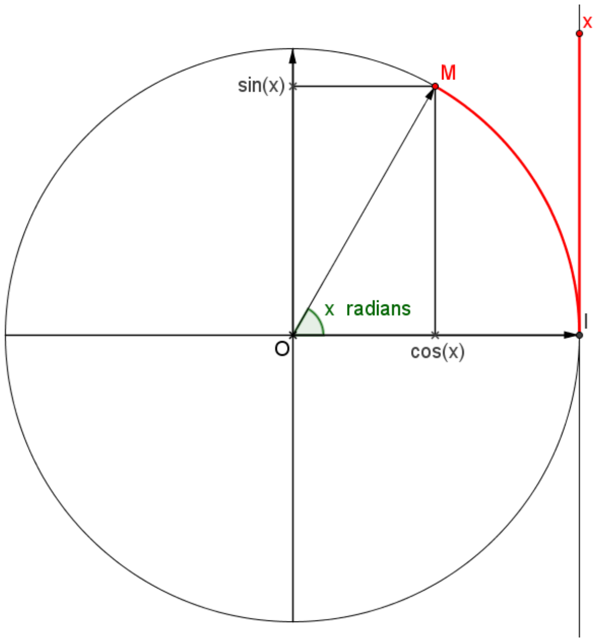
DÉFINITION.

Soient (O ; $\vec{OI}$, $\vec{OJ}$) un repère orthonormé et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.

Soit x un nombre réel.

On note M le point associé au réel x par « enroulement de la droite numérique ».

- le ***cosinus de x***, noté **cos *x***, est l'abscisse de M ;
- le ***sinus de x***, noté **sin *x***, est l'ordonnée de M.



I.2 C'est comme la trigonométrie dans un triangle rectangle ?

PROPRIÉTÉ. On suppose que $0<x<\frac{\pi}{2}$ (autrement dit que M a une abscisse positive).

$\mathbf{\cos x=\cos \widehat{IOM}}$ et $\mathbf{\sin x=\sin \widehat{IOM}}$.

Démonstration : On note H (cos x ; 0) et K (0 ; sin x).

- cos $\widehat{IOM}$ = $\frac{OH}{OM}$ donc cos $\widehat{IOM}$ = OH (car OM = 1). Or, OH = cos x d'où $\cos x=\cos \widehat{IOM}$.
- on montre de même que $\sin x=\sin \widehat{IOM}$.

I.3 Propriétés et valeurs remarquables

PROPRIÉTÉS.

Pour tout réel x : • $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ • $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ • $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

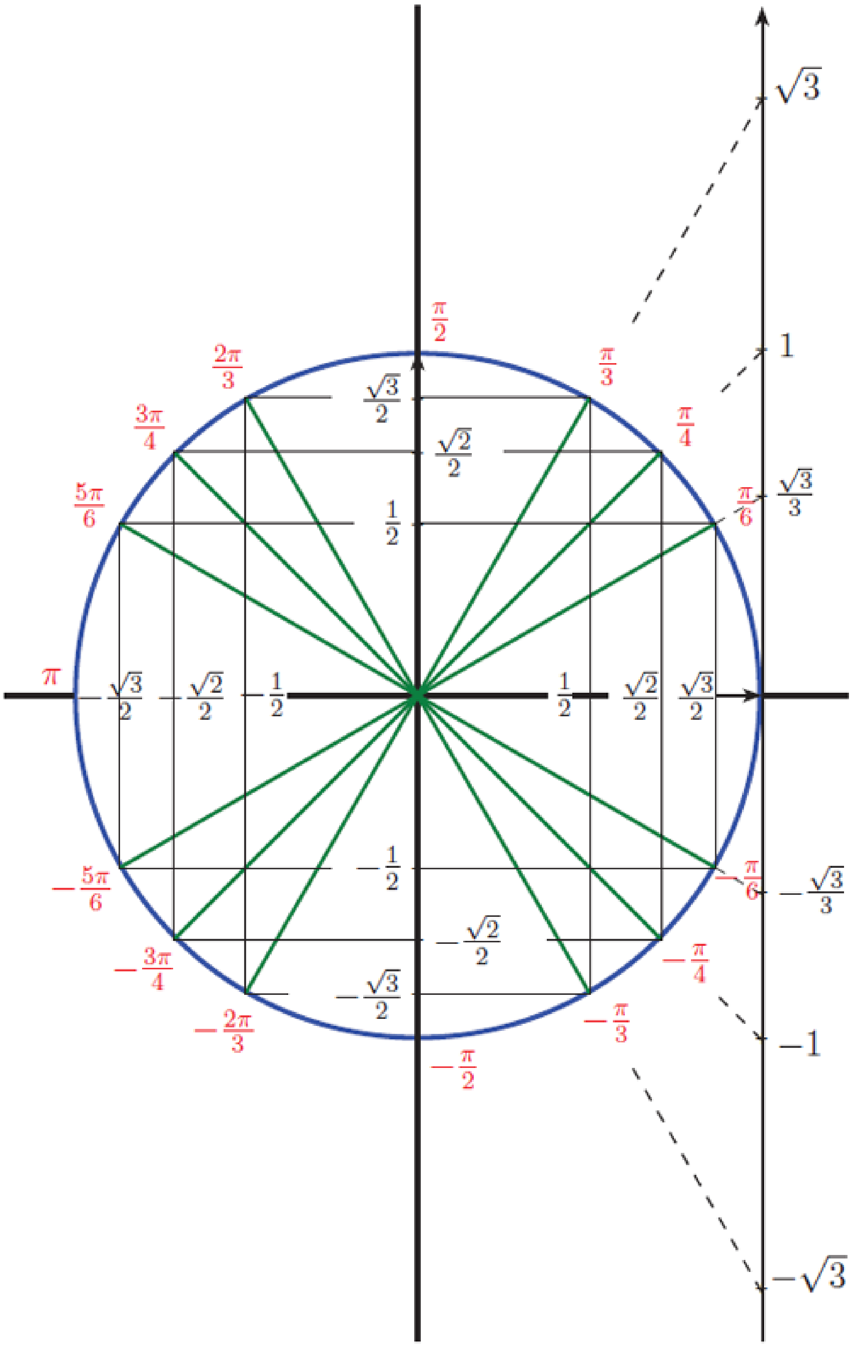
Démonstrations : L'égalité $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ provient de …

PROPRIÉTÉS. VALEURS REMARQUABLES

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure de l'angle (en degré)	0	30	45	60	90	180	360
$\cos x$	1						
$\sin x$	0						

Démonstrations : purement géométriques comme au collège.

L'idée est de se placer dans un demi-carré de côté 1 ou demi-triangle équilatéral de côté 1.
Pour quelques démonstrations, voir ici par exemple :
gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/Lycee_fichiers/CoursP_fichiers/trigo.pdf



Source : www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/pages/mathTermS.html

PROPRIÉTÉS. FORMULES D'ADDITION

Pour tous réels a et b :

- $\cos(a+b)=\dots$
- $\cos(a-b)=\dots$
- $\sin(a+b)=\dots$
- $\sin(a-b)=\dots$

Démonstrations : utiliser les définitions du produit scalaire.

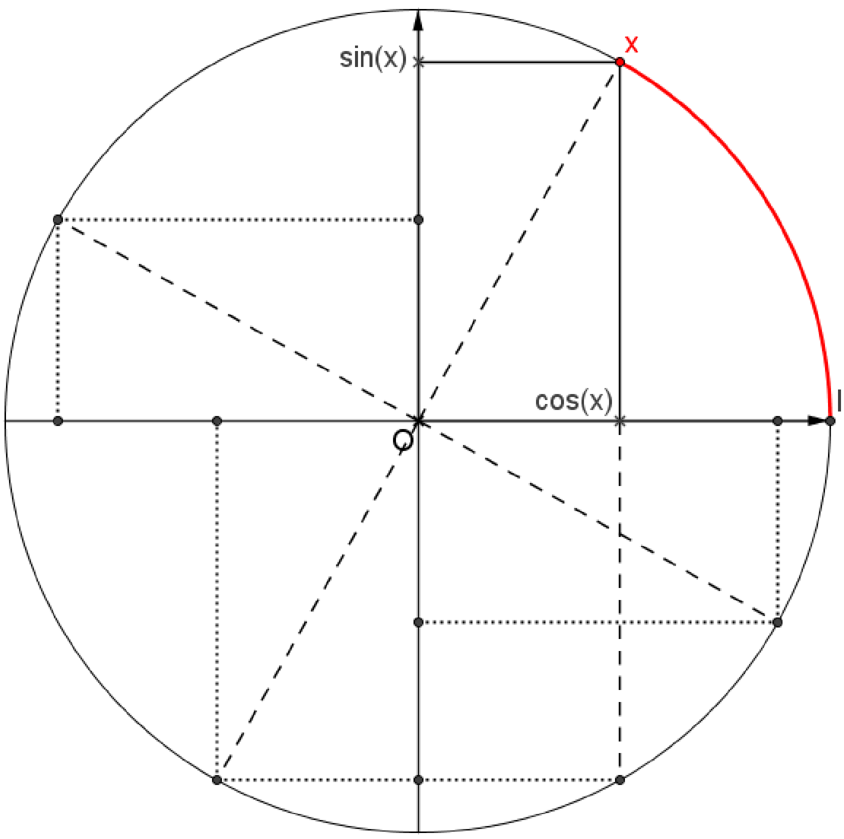
> Voir par exemple : www.parfenoff.org/pdf/1re_S/geometrie/1re_S_appli_produit_scalaire_trigo.pdf

PROPRIÉTÉS. FORMULES DE SYMÉTRIE ET DE DÉPHASAGE

Pour tout réel x :

- $\cos(-x)=\cos x$
- $\cos(x+2\pi)=\cos x$
- $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\dots$
- $\cos(x+\pi)=\dots$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\dots$
- $\sin(-x)=-\sin x$
- $\sin(x+2\pi)=\sin x$
- $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\dots$
- $\sin(x+\pi)=\dots$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\dots$

Démonstrations : très visuel, mais se démontre/retrouve rigoureusement à partir des formules d'addition du cosinus et sinus.



PROPRIÉTÉS. FORMULES DE DUPLICATION ET DE LINÉARISATION

Pour tout réel a :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

<u>Démonstrations</u> : faciles… à démontrer et à retrouver.

PROPRIÉTÉS. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Pour tous réels a et b :

- $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2k\pi \\ \textbf{\textit{ou}}\ b = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$
- $\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2k\pi \\ \textbf{\textit{ou}}\ b = -a + 2k\pi \end{cases}$

<u>Démonstrations</u> : utiliser le cercle trigonométrique.

<u>Exemple</u> : résoudre les équations $\sin x = \cos\dfrac{2\pi}{3}$ et $\cos^2 x - \dfrac{1}{2} = 0$.

Remarque : correction page 146.

II. Fonctions trigonométriques cos et sin

Nous avons défini, pour tout réel x, son cosinus et son sinus.
Par conséquent, nous pouvons créer les fonctions correspondantes :

DÉFINITION.
Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont respectivement appelées :
« ***fonction cosinus*** » (notée **cos**) et « ***fonction sinus*** » (notée **sin**).

PROPRIÉTÉ. Les fonctions cos et sin sont périodiques, de période 2π .

Démonstration : $\cos(x+2\pi)=\cos x$

PROPRIÉTÉS. La fonction cos est paire : pour tout réel x , …
La fonction sin est impaire : pour tout réel x , …

La périodicité et la parité de ces fonctions permettent de ramener leurs études à l'intervalle $[0;2\pi]$.

III. Dérivées des fonctions cos et sin

PROPRIÉTÉS. • La fonction cos est dérivable en 0 et $\cos'(0)=$

• La fonction sin est dérivable en 0 et $\sin'(0)=$

Démonstrations : propriétés admises, même si accessible (voir pages 143/144/155).

Par exemple, pour la fonction sinus, l'idée est de :

- démontrer que sin est continue en 0, en montrant que si $0<x<\frac{\pi}{2}$ alors $0\leqslant\sin x\leqslant x$,
et en utilisant alors le théorème des gendarmes pour en déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

- montrer que si $0<x<\frac{\pi}{2}$ alors $\sin x\leqslant x\leqslant\frac{\sin x}{\cos x}$
(en utilisant le cercle trigonométrique et des inégalités d'aires)
pour en déduire que $\cos x\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant 1$ puis utiliser le théorème des gendarmes pour conclure (en montrant juste avant que $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-0^2}=1$).

<u>*Exercice*</u> : calculer, si ces limites existent, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$.

PROPRIÉTÉS.	• La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' =$ • La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' =$

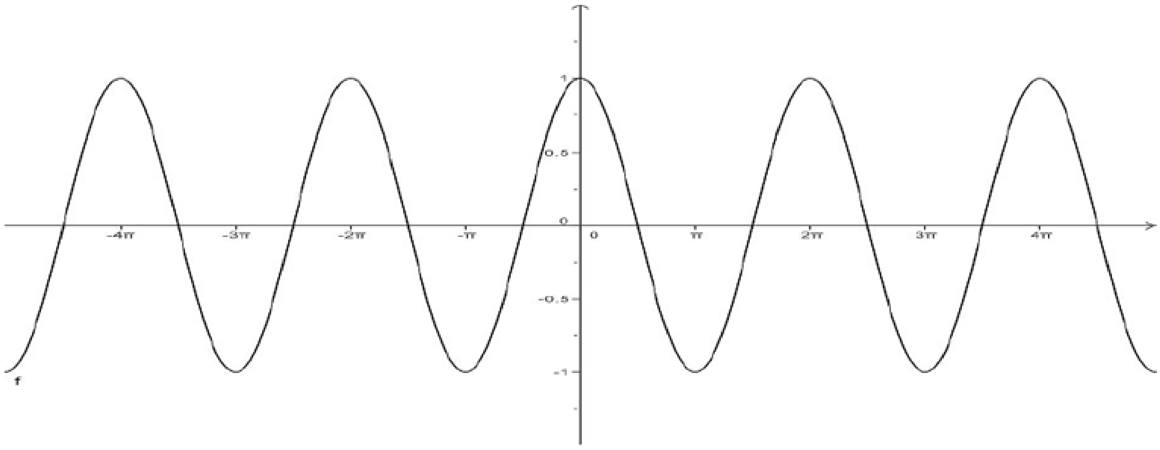
Démonstrations :

BILAN : tableaux de variations

Tracer les tableaux de variations des fonctions cos et sin sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

<u>*Courbes représentatives des fonctions cos et sin*</u>

Fonction cosinus



Fonction sinus