INTERVALLE(S) DE FLUCTUATION ASYMPTOTIQUE « DE TERMINALE » : SOYONS PLUS PRÉCIS

PROPRIÉTÉ Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$. On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

Il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$:

$$p\left(F_n \in \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 0{,}95.$$

Démonstration : Soit $X_n \sim B(n;p)$.

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}950001$ avec $a_n = p(-u_{0{,}049999} \leqslant Z_n \leqslant u_{0{,}049999})$.

2. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ alors $a_n > 0{,}95$.

3. Démontrer que $u_{0{,}04999} > 1{,}9599$.

4. En déduire que, si $n \geqslant n_0$: $p(-1{,}96 \leqslant Z_n \leqslant 1{,}96) > 0{,}95$.

5. Conclure que $p\left(p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{X_n}{n} \leqslant p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0{,}95$.