Disons que X suit une loi binomiale de paramètres n et p et que je veux trouver une approximation de $p(X \leqslant 45)$ à l'aide du théorème de Moivre-Laplace, pour moi il faut, avant de centrer réduire, remplacer $p(X \leqslant 45)$ par $p(0 \leqslant X \leqslant 45)$.
Je ne le vois dans aucun corrigé que je trouve sur internet ?
Qui pourrait me dire pourquoi ?

C'est selon moi une approximation "abusive", que l'on utilise trop souvent!

On veut calculer $\mathrm{p}(X \leqslant b)$.
D'après le théorème de Moivre-Laplace, avec Z qui suit la loi normale centrée réduite :
on peut approcher cela par $\mathrm{p}\left(Z \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$ ou par $\mathrm{p}\left(-\frac{\mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$.

L'erreur commise est donc $\mathrm{p}\left(Z \leqslant -\frac{\mu}{\sigma}\right)$.

Dans les conditions de T°S, on a $n\,p \geqslant 5$ donc on arrive rapidement à :

$$\mathrm{p}\left(Z \leqslant -\frac{\mu}{\sigma}\right) \leqslant \mathrm{p}\left(Z \leqslant -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1-p}}\right) \leqslant \mathrm{p}(Z \leqslant -\sqrt{5}).$$

Or, $\mathrm{p}(Z \leqslant -\sqrt{5})$ est environ égale à 0,012673.
<u>L'erreur "maximale" est donc d'environ 0,0127</u>.

On peut alors prendre l'exemple suivant pour bien faire comprendre aux élèves :
$n=255$, $p=0{,}02$ (situation pas vraiment rare).
On a $n\,p=5{,}1 \geqslant 5$, $n(1-p) \geqslant 5$, $n \geqslant 30$ (conditions vérifiées).
Calculons d'abord : $\mathrm{p}(X \leqslant 5) \approx 0.5982$.
On a $\mathrm{p}\left(Z \leqslant -\frac{\mu}{\sigma}\right)$ ≈ 0,0113, que l'on peut faire apparaître "un peu mieux" :

$\mathrm{p}\left(Z \leqslant \frac{5-\mu}{\sigma}\right) \approx 0{,}4822$

$\mathrm{p}\left(-\frac{\mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{5-\mu}{\sigma}\right) \approx 0{,}4709$, soit une erreur de 0,0113.

Et même avec correction de continuité, ça ne change bien sûr rien du tout :

$\mathrm{p}\left(Z \leqslant \frac{5{,}5-\mu}{\sigma}\right) \approx 0{,}5710$

$\mathrm{p}\left(-\frac{\mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{5{,}5-\mu}{\sigma}\right) \approx 0{,}5597$, soit une erreur de 0,0113.

<u>Conclusion</u> : on peut arriver à une erreur d'environ 0,0127, ce qui selon la situation étudiée n'est pas négligeable.