LOIS À DENSITÉ (PARTIE 2)
LES LOIS EXPONENTIELLES

De nos jours, nous avons tous une idée de la probabilité de vivre 40 ans pour un enfant qui vient de naître[1]. Les tables de mortalité donnent un nombre de l'ordre de 0,98. La probabilité de vivre 40 ans de plus, pour une personne de 50 ans, est un nombre bien inférieur, de l'ordre de 0,65. Pour une personne de 60 ans, cette probabilité de vivre 40 ans de plus est de l'ordre de 0,02. Le fonctionnement naturel des humains et des animaux suit la loi du vieillissement ou de l'usure : on n'a pas la même probabilité de vivre 40 ans de plus lorsque l'on vient de naître ou lorsque l'on a déjà 50 ou 60 ans.

La plupart des phénomènes naturels sont soumis au processus de vieillissement.

Il existe des phénomènes où il n'y a pas de vieillissement ou d'usure. Il s'agit en général de phénomènes accidentels. Pour ces phénomènes, la probabilité, pour un objet d'être encore en vie ou de ne pas tomber en panne avant un délai donné sachant que l'objet est en bon état à un instant *t*, ne dépend pas de *t*.
Par exemple, pour un verre en cristal, la probabilité d'être cassé dans les cinq ans ne dépend pas de sa date de fabrication, de son âge.

Source : http://www.irem.ups-tlse.fr/spip/IMG/pdf_La_loi_exponentielle.pdf

I. Définition

PROPRIÉTÉ. Soit λ un réel strictement positif.
La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est une densité de probabilité.

Démonstration :

DÉFINITION.
Soit λ un réel strictement positif
On dit qu'une variable aléatoire X suit ***une loi exponentielle de paramètre λ*** lorsque sa fonction de densité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

1 Sur l'espérance de vie, lire ce superbe article de François Sauvageot : http://images.math.cnrs.fr/Esperance-de-vie.html

II. Durée de vie sans vieillissement

ROC

PROPRIÉTÉ. **DURÉE DE VIE SANS VIEILLISSEMENT**
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.
Pour tous réels t et h positifs : $p_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = p(X \geqslant h)$.

Démonstration :

Cette propriété est appelée propriété de durée de vie sans vieillissement.
En effet, si on interprète X comme la durée de vie d'un appareil, cette égalité signifie que la probabilité que l'appareil fonctionne encore au-delà du temps $t+h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant t est égale à la probabilité que l'appareil fonctionne au-delà du temps h .

PROPRIÉTÉ. Une v.a.r. X représente une durée de vie sans vieillissement si, et seulement si, elle suit une loi exponentielle.

Démonstration : admise, mais facile.

Il suffit de poser $G(t) = p(X \geqslant t)$ et de montrer que $G(t+h) = G(t) \times G(h)$, avec $G(0) = 1$.
On reconnaît alors l'équation fonctionnelle de la fonction exponentielle…
(bien sûr, il faut supposer que G est dérivable).
Voir https://www.mathemathieu.fr/index.php?option=com_attachments&task=download&id=1333

Une loi exponentielle modélise donc souvent la durée de vie d'un ***phénomène sans mémoire***, ou ***sans vieillissement***, ou ***sans usure*** : le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t .

Le paramètre λ peut représenter le nombre de fois qu'un événement survient durant un laps de temps donné.

III. Espérance d'une loi exponentielle

ROC

PROPRIÉTÉ.
L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration :

Soient λ un réel strictement positif et g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t) = \lambda t \, e^{-\lambda t}$.

1. Démontrer que g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que : $g(t) = e^{-\lambda t} - \dfrac{1}{\lambda} g'(t)$.

2. En déduire que : $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}\left(-e^{-\lambda x} - \lambda x \, e^{-\lambda x} + 1\right)$.

3. En déduire que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}$.

APPLICATIONS CLASSIQUES

La radioactivité

Un atome radioactif est un atome instable qui, au bout d'un certain temps, se désintègre, c'est-à-dire se transforme en un atome d'un autre type. En 1902, Rutherford et Soddy découvrent la loi de désintégration radioactive qui peut s'énoncer de la façon suivante : la probabilité qu'un atome ne soit pas désintégré à l'instant $t+s$, sachant qu'il est « vivant » à l'instant t, ne dépend pas de t.
Chaque atome radioactif possède une durée de vie qui suit une loi exponentielle.
Le paramètre λ s'appelle alors la ***constante de désintégration***.

La durée de vie moyenne $\frac{1}{\lambda}$ s'appelle le ***temps caractéristique***.

La loi des grands nombres permet de dire que la concentration d'atomes radioactifs va suivre la même loi. La médiane correspond au temps T nécessaire pour que la population passe à 50 % de sa population initiale et s'appelle la ***demi-vie*** ou période.

Exercice : démontrer que la médiane est égale à $\frac{\ln(2)}{\lambda}$, c'est-à-dire que $p(X>T)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow T=\frac{\ln 2}{\lambda}$.

*Un **modèle de Malthus** caché (voir DM sur la dynamique des populations, partie 1)*

Un noyau radioactif est un noyau instable subissant spontanément une transformation appelée désintégration, permettant un retour à la stabilité. Il ne « vieillit » donc pas puisqu'il se transforme sans subir de modifications progressives. Autrement dit, un noyau radioactif créé il y a 10 ans a autant de chance de se désintégrer qu'un noyau identique venant d'être créé.
Pour un noyau donné, le phénomène de désintégration est donc aléatoire et imprévisible.
Par contre, l'évolution statistique d'une population de noyaux répond à une loi de probabilité bien déterminée !

Si on note N_0 le nombre de noyaux radioactifs tous identiques initialement présents dans l'échantillon.
Après un temps t, la population a diminué (on la note $N(t)$).
Le nombre moyen de désintégration est proportionnel à la population existante $N(t)$ et à la durée de mesure Δt :

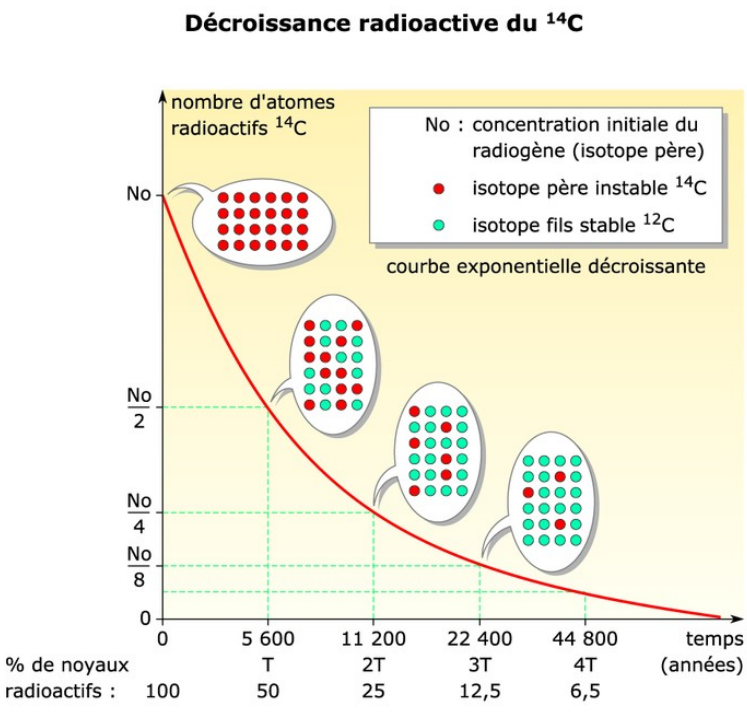
$$\Delta N = -\lambda \times N(t) \times \Delta t$$

*avec λ un coeff. de proportionnalité appelé **constante radioactive**.*

Si la durée tend vers 0, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$N'(t)=-\lambda N(t).$$

La solution de cette équation différentielle est alors : $N(t)=N_0 e^{-\lambda t}$.
On retrouve la loi exponentielle.
*La constante (en secondes) $\tau=\frac{1}{\lambda}$ est la **durée de vie moyenne** d'un noyau.*



Source de l'image : https://static1.assistancescolaire.com/ele/images/t_t103i03z.jpg

Les files d'attente (avions, guichets, programmes, etc.)

L'arrivée de clients dans une file d'attente est souvent modélisée par une loi exponentielle.

La théorie des files d'attente est une théorie mathématique relevant du domaine des probabilités, qui étudie les solutions optimales de gestion des files d'attente, ou queues. Une queue est nécessaire et se créera d'elle-même si ce n'est pas anticipé, dans tous les cas où l'offre est inférieure à la demande, même temporairement. Elle peut s'appliquer à différentes situations : gestion des avions au décollage ou à l'atterrissage, attente des clients et des administrés aux guichets, ou bien encore stockage des programmes informatiques avant leur traitement.

Ce domaine de recherches, né en 1917, des travaux de l'ingénieur danois Erlang sur la gestion des réseaux téléphoniques de Copenhague entre 1909 et 1920, étudie notamment les systèmes d'arrivée dans une queue, les différentes priorités de chaque nouvel arrivant, ainsi que la modélisation statistique des temps d'exécution.

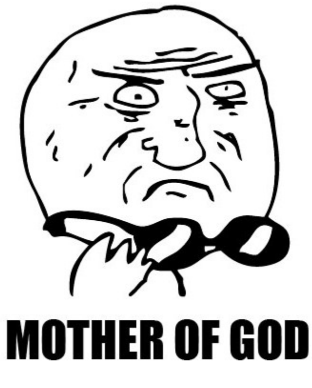
Dans ce contexte des files d'attente, la distribution exponentielle donne une assez bonne approximation des temps de service (par exemple avant l'arrivée des premiers secours auprès des victimes d'accidents).

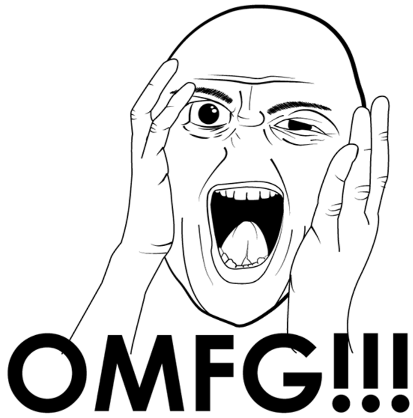
Autres exemples d'utilisation de la loi exponentielle :

- le temps d'attente du premier appel pour un standard téléphonique
- la durée de vie d'un composant électronique
- le temps écoulé entre deux coups de téléphone reçus au bureau
- le temps écoulé entre deux accidents de voiture dans lequel un individu donné est impliqué
- le temps entre deux arrivées successives dans un fast-food, à la caisse d'un supermarché, etc.
- le temps écoulé entre deux défauts de crédit pour une banque
- le temps écoulé entre deux catastrophes aériennes

Remarque importante :

> Les manuels de TS regorgent de ***situations modélisées à tort par une loi sans vieillissement*** : temps d'attente à un standard téléphonique, à un guichet ou à la caisse d'un supermarché.
> En effet, la probabilité d'attendre 2 minutes pour quelqu'un ayant déjà attendu 10 minutes est inférieure à la probabilité d'attendre 2 minutes pour quelqu'un qui vient juste d'arriver ; il y a donc vieillissement…





IV. Quelques exemples au baccalauréat

• La compagnie d'autocars (Bac série S, centres étrangers, 2003)

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, des troupeaux sur la route, etc.
Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que la variable D suit une loi exponentielle …

• Durée de vie d'un composant électronique (Bac série S, Métropole, 2004 / juin 2016, etc.)

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique…

• Durée de vie d'un oscilloscope (Bac série S, Polynésie, 2004)

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques.
La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi de durée de vie sans vieillissement…

• Extrait d'un QCM (Bac série S, Réunion, 2003)

La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01…

• La fabrique de cylindres (Bac série S, Guadeloupe, Guyane, 2006)

[…] Une machine-outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=1,5$.
Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté.
Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas.
Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé…

• La durée de vie d'un robot (Bac série S, Liban 2006)

La durée de vie d'un robot exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ …

• La fabrication d'appareils électroniques (Bac série S, Amérique du sud, 2005)

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants tous identiques en apparence, mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant soit défectueux est égale à 0,02.
On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilés à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.
[…] On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1=5\times10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2=10^{-4}$ …

• Temps d'attente à un guichet (Bac série S, Guadeloupe, Guyane, 2005)

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ…

• ***La durée de vie d'un robot (Bac série S, Polynésie juin 2016)***

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes.
Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0{,}2$.
Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.
L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ 0,451.

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.

3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures.
Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.