LOIS À DENSITÉ (PARTIE 1)
THÉORIE + LES LOIS UNIFORMES

I. Loi à densité : la théorie

I.1 Variable aléatoire continue

DÉFINITIONS. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
Une ***variable aléatoire*** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans ℝ. On la note souvent X.

Une variable aléatoire qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle I de ℝ est dite ***continue***.

Exemples :

- Un joueur lance un dé équilibré à six faces. S'il obtient 1, 2 ou 3, il perd 5 €.
  S'il obtient 4 ou 5, il gagne 1 €. S'il obtient 6, il gagne 10 €.
  On peut définir la variable aléatoire « gain algébrique » X du joueur.
  Cette v.a.r. (*variable aléatoire réelle)* est définie sur l'univers Ω = {1;2;3;4;5;6},
  et X(Ω) = {-5 ; 1 ; 10}.
  C'est donc une v.a.r. ***discrète***.

- Exemples de variables aléatoires ***continues*** :

  - Variable correspondant à la taille d'un élève
  - Variable correspondant à la longueur d'un train,
  - Variable correspondant au temps d'attente à une caisse
  - Variable correspondant à la durée de vie d'une personne dans une ville donnée
  - Variable correspondant au poids à la naissance d'un bébé, exprimé en kg
  - La v.a.r. égale à la durée de fonctionnement d'une ampoule électrique (en heures)
  - La v.a.r. égale à la durée de communication téléphonique (en h) d'un 16-25 ans
  - L'instruction ALEA() sur un tableur (ou RAND# sur une calculatrice) donne un nombre au hasard compris entre 0 et 1.
    Ces instructions définissent une v.a. continue prenant ses valeurs dans [0;1[.

I.2 Fonction de densité

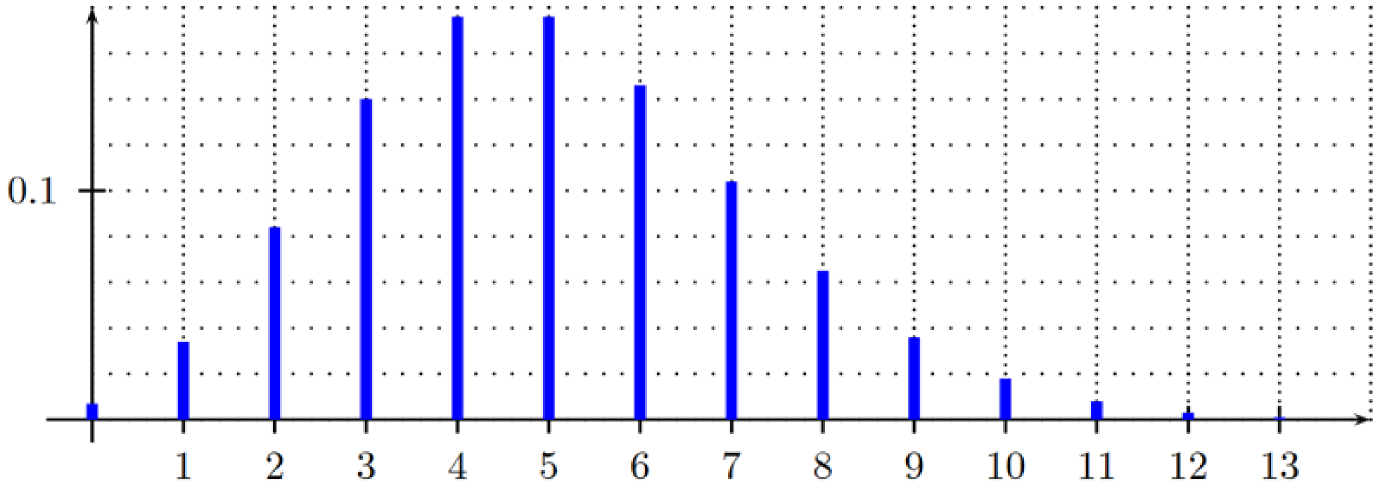
Pour une v.a.r. discrète, la loi de probabilité est généralement donnée sous la forme d'un tableau…

Valeurs de X : x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Probabilité : $p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

… ou une formule, par exemple pour la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$: $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Pour une v.a.r. discrète, la loi de probabilité vérifie : pour tout i, $p(X=x_i)\geqslant 0$; et $\sum_i p(X=x_i)=1$.

On peut par ailleurs représenter une telle loi par un diagramme en bâtons :



Par analogie, pour une v.a.r. continue, on utilisera des fonctions, continues à valeurs positives, et les probabilités des intervalles seront données par des aires, c'est-à-dire par des intégrales.

DÉFINITION.

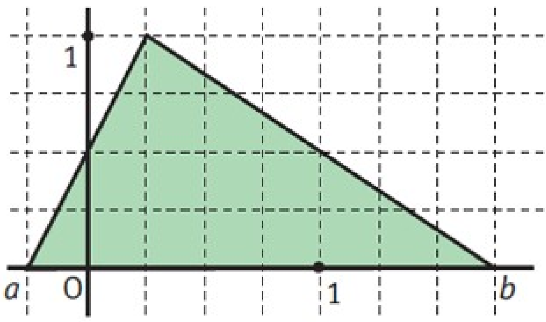
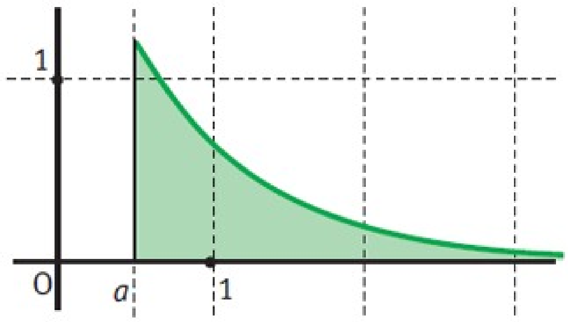
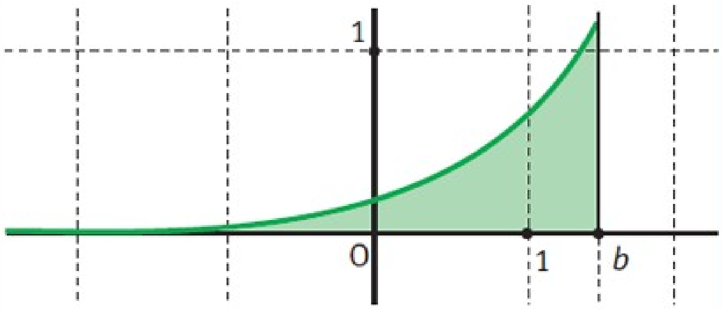
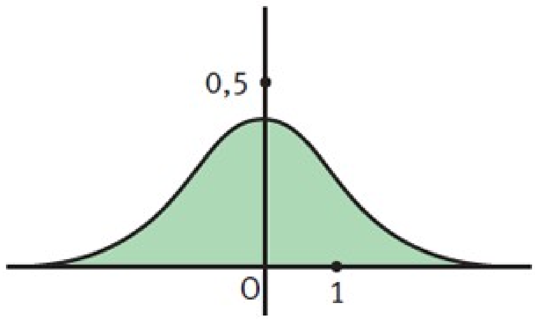
Soit I un intervalle. Une fonction f définie sur I est appelée ***fonction de densité*** sur I lorsque :

- f est continue sur I (*sauf éventuellement en un nombre fini de points*)
- f est positive sur I
- $\int_I f(x)dx=1$

(l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe rep. de f et l'axe des abscisses est égale à 1 UA)

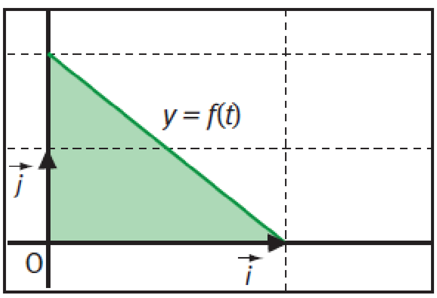
La troisième condition correspond à plusieurs cas différents suivant la nature de l'intervalle I.

Dans le tableau de la page suivante, a et b désignent des nombres réels.

$I=[a\,;b]$	$I=[a\,;+\infty[$
$\int_a^b f(t)\ dt=1$ 	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_a^x f(t)\ dt\right)=1$ 
$I=]-\infty\,;b]$	$I=]-\infty\,;+\infty[$
$\lim\limits_{y\to-\infty}\left(\int_y^b f(t)\ dt\right)=1$ 	$\lim\limits_{y\to-\infty}\left(\int_y^0 f(t)\ dt\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f(t)\ dt\right)=1$ 

Source de l'image : http://www.academie-en-ligne.fr/Ressources/7/MA02/AL7MA02TEPA0213-Sequence-08.pdf

Attention :



Une fonction de densité peut prendre des valeurs supérieures à 1.

f n'est pas une probabilité, mais une densité de probabilité.

I.3 Probabilité d'un événement

DÉFINITION.
Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et I un intervalle.
Soit X une variable aléatoire continue de densité f , définie sur Ω et à valeurs dans I.
Pour tout intervalle J inclus dans I, la probabilité de l'événement $\{ X \in J \}$ est l'aire du domaine suivant : $\{ M(x;y) ,\ x \in J \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x) \}$.

Autrement dit : $\boxed{p(X \in J)=\int_J f(x)\,dx}$.

On admet que l'on peut prolonger la loi de probabilité à toute union finie d'intervalles de telle sorte que l'on ait la propriété :

PROPRIÉTÉ.
Si J et J' sont deux unions d'intervalles inclus dans I, on a :

$$P(X \in J \cup J')=P(X \in J)+P(X \in J') .$$

On obtient alors facilement :

PROPRIÉTÉS.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité de fonction de densité *f* sur I.

- $\forall\, a \in I :\ p(X=a)=0$.
- Pour tous réels a et b de I tels que $a<b$:

$$p(X \in [a;b])=p(X \in]a;b])=p(X \in [a;b[)=p(X \in]a;b[)=\int_a^b f(x)\,dx .$$

<u>Démonstrations</u> : *faciles*

I.4 Espérance d'une v.a.r. continue

Dans le cas d'une v.a.r. discrète, l'espérance est définie par : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(X=x_i)$.

Dans le cas d'une v.a.r. continue, cette somme n'a pas de sens, car la variable peut prendre une infinité de valeurs. On prolonge alors naturellement cette définition :

DÉFINITION.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité de fonction de densité f sur I.

L'espérance de X est[1] : $E(X)=\int_I x\, f(x)\,dx$.

1 Bien sûr dans le cas où cette intégrale existe.
Si par exemple $I=[2;+\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_2^x x\, f(x)\,dx$ n'existe pas, alors $\int_I x\, f(x)\,dx$ n'a aucun sens et l'espérance n'existe pas.

II. Les lois uniformes

II.1 La loi uniforme standard

PROPRIÉTÉ.
La fonction constante f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=1$ est une densité de probabilité.

Démonstration :

DÉFINITION.
On dit qu'une variable aléatoire X suit ***la loi uniforme*** sur l'intervalle $[0;1]$ si sa densité est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=1$. On note X ~ $\mathcal{U}([0;1])$.

Exemple : On choisit un nombre au hasard dans $[0;1]$.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit compris entre 0,2 et 0,25 ?

2. L'expression « compris entre 0,2 et 0,25 » peut être interprétée avec des inégalités strictes.
Cela changera-t-il le résultat obtenu ?

II.2 Loi uniforme sur [*a*;*b*]

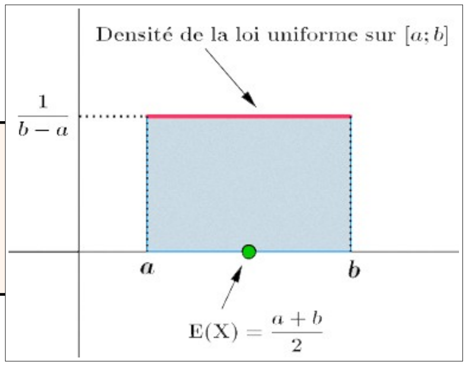
PROPRIÉTÉ.
La fonction constante f définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\frac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité.

Démonstration :

DÉFINITION.
On dit qu'une variable aléatoire X suit ***la loi uniforme*** sur l'intervalle $[a;b]$ si sa densité est la fonction définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\frac{1}{b-a}$. On note X ~ $\mathcal{U}([a;b])$.

Exemple : On choisit un nombre au hasard dans $[0;100[$.

Quelle est la probabilité qu'il soit compris entre 90 et 100 ?



II.3 Espérance d'une loi uniforme

PROPRIÉTÉ.
L'espérance d'une v.a.r. X suivant une loi uniforme sur $[a;b]$ est :

$$\mathrm{E(X)}=\frac{a+b}{2}.$$

Démonstration : facile… Il suffit de calculer $\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx$.