

Pré-requis : tout dépend de la méthode choisie pour résoudre le problème...

Problème des tintements de verres

Lors d'une réception, chacune des n personnes ($n \geq 2$) présentes trinque avec toutes les autres. Les verres s'entrechoquent... Combien de tintements se feront entendre ?

I. Méthode 1 : un problème récurrent

Si une $n+1$ ^{ème} personne arrivait, il y aurait n tintements de verres supplémentaires. Donc :

Pour un groupe de 2 personnes, il y a 1 tintement.

Pour un groupe de k personnes, si on rajoute 1 personne, cela rajoute $k - 1$ tintements.

Par récurrence, on montre donc que le nombre total de tintements est : $1+2+3+\dots+(n-1)$ ie $\frac{n(n-1)}{2}$.

II. Méthode 2 : compter personne par personne

Considérons chacune des n personnes :

- la 1ère a trinqué avec toutes les autres, donc $n-1$ fois
- la 2ème a déjà trinqué avec la 1ère personne (déjà comptée), s'ajoute les $n-2$ autres personnes...
- la 3ème a déjà trinqué avec les deux premières personnes (déjà comptées), s'ajoute les $n-3$ autres personnes...
- etc. jusqu'à la dernière personne qui aura trinqué avec toutes les autres.

Au total, le nombre de poignées de mains échangées est donc :

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\dots+2+1+0 \text{ ie } \frac{n(n-1)}{2}.$$

III. Méthode 3 : compter globalement puis rectifier

Chacune des n personnes a trinqué avec $n-1$ personnes.

Cela fait donc $n(n-1)$ tintements.

Mais comme chaque tintement concerne deux personnes, ce résultat est le double du nombre total de tintements. D'où le résultat : $\frac{n(n-1)}{2}$.

IV. Méthode 4 : changer de point de vue

Un tintement c'est la rencontre de 2 verres.

Il y aura donc autant de tintements que de façons de choisir 2 verres parmi les 13, c'est-à-dire $\binom{n}{2}$.

Or, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. En effet, il y a n choix pour le premier verre, et $n-1$ choix pour le second.

Mais l'ordre ne comptant pas, on divise par 2...

Remarque : ces quatre solutions sont (superbement) schématisées dans une des vidéos de El Jj :
<https://youtu.be/etzcN6g-vNY?t=4m48s>