EXERCICE 4 (Pondichéry - 17/04/2015) **5 points**

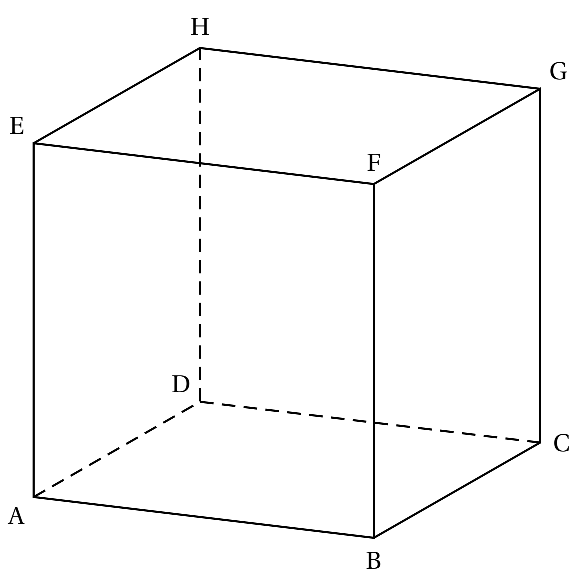
Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,,\,\overrightarrow{\text{AD}}\,,\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $\text{M}\left(1\,;\,1\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$, $\text{N}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$, $\text{P}\left(1\,;\,0\,;\,-\dfrac{5}{4}\right)$.

1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$.
   En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.
3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe.
   a. Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.
   b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?
4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.
5. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\,(5\,;\,-8\,;\,4)$ normal au plan (MNP).
   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).
   b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.
   a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{4}{7}\,;\,\dfrac{24}{35}\,;\,\dfrac{23}{35}\right)$.
   b. On donne $\text{FK} = \sqrt{\dfrac{27}{35}}$.
   Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

ANNEXE



Algorithme 1

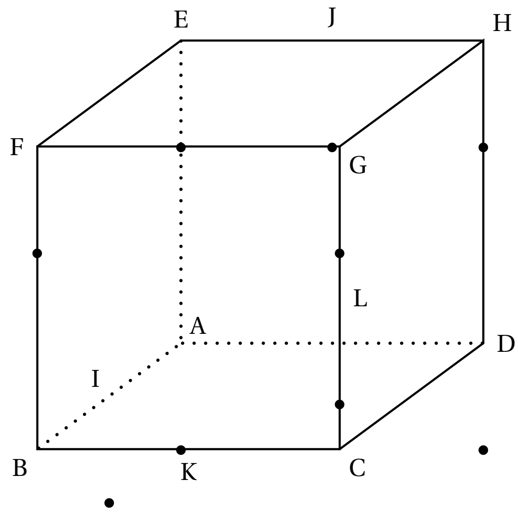
Saisir $x_{\text{M}}, y_{\text{M}}, z_{\text{M}}, x_{\text{N}}, y_{\text{N}}, z_{\text{N}}, x_{\text{P}}, y_{\text{P}}, z_{\text{P}}$
d prend la valeur $x_{\text{N}} - x_{\text{M}}$
e prend la valeur $y_{\text{N}} - y_{\text{M}}$
f prend la valeur $z_{\text{N}} - z_{\text{M}}$
g prend la valeur $x_{\text{P}} - x_{\text{M}}$
h prend la valeur $y_{\text{P}} - y_{\text{M}}$
i prend la valeur $z_{\text{P}} - z_{\text{M}}$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_{\text{M}}, y_{\text{M}}, z_{\text{M}}, x_{\text{N}}, y_{\text{N}}, z_{\text{N}}, x_{\text{P}}, y_{\text{P}}, z_{\text{P}}$
d prend la valeur $x_{\text{N}} - x_{\text{M}}$
e prend la valeur $y_{\text{N}} - y_{\text{M}}$
f prend la valeur $z_{\text{N}} - z_{\text{M}}$
g prend la valeur $x_{\text{P}} - x_{\text{M}}$
h prend la valeur $y_{\text{P}} - y_{\text{M}}$
i prend la valeur $z_{\text{P}} - z_{\text{M}}$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$

EXERCICE 1 (Liban - 27/05/2015) **5 points**

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$.

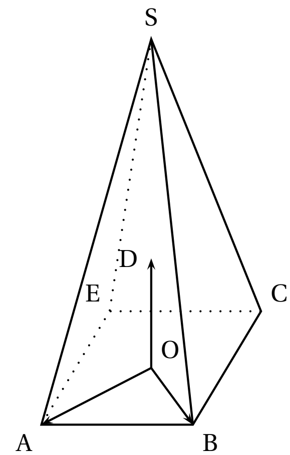
1. **a.** Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Exercice 1 **(Amérique du Nord - 2/06/15)** **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}\right)$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées (0 ; 0 ; 3) dans ce repère.



Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1.
   Construire le point U sur la figure.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles.
   Construire le point V sur la figure.
3. Soit K le point de coordonnées $\left(\dfrac{5}{6}\,;\,-\dfrac{1}{6}\,;\,0\right)$.
   Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\dfrac{5\sqrt{43}}{18}$.

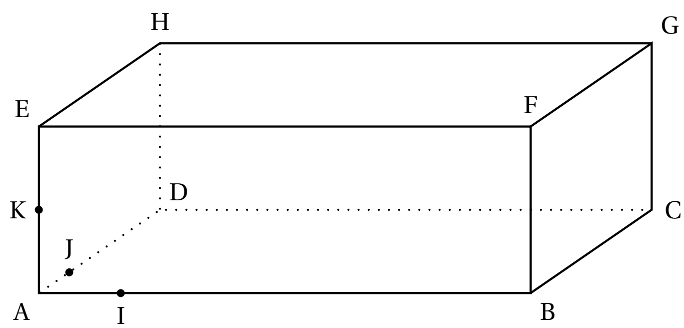
1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,1\right)$.
   Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.
3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).
4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

EXERCICE 1 (Polynésie - 12/06/15) **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.

I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



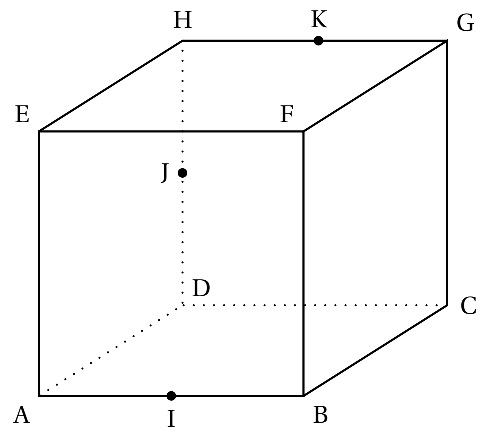
On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG).
   On ne demande pas de justification.

EXERCICE 3 (Polynésie - 9/09/15) **3 points**

Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [HD] et K est le milieu de [HG].
On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
2. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).
3. Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

EXERCICE 2 (Métropole - 22/06/15) **3 POINTS**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A$(0 ; -1 ; 5)$, B$(2 ; -1 ; 5)$, C$(11 ; 0 ; 1)$, D$(11 ; 4 ; 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t ; -1 ; 5)$ et $N_t(11 ; 0,8t ; 1 + 0,6t)$.

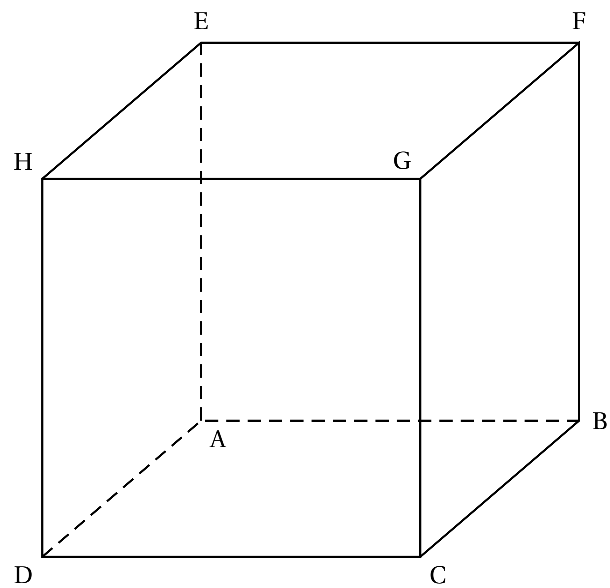
Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. **a.** La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
   b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).
   Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.
   c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point E$(11 ; -1 ; 5)$.
   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. **a.** Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
   b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

EXERCICE 4 (Antilles-Guyane - 9/09/15) **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit ABCDEFGH le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & s \\ y & = & 1-s, \\ z & = & 0 \end{array}\right. \text{, où s décrit l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des nombres réels.}$$

   b. Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées $(t\,;\,t\,;\,t)$ où t est un réel.

2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG).

   Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

3. Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s\,;\,1-s\,;\,0)$ un point de la droite (DB) et $N(t\,;\,t\,;\,t)$ un point de la droite (AG).

   a. Montrer que $MN^2 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

   b. En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.

   Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas ?

EXERCICE 3 (Nlle-Calédonie - 19/11/15) **5 points**

Commun à tous les candidats

Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) \qquad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right)$$

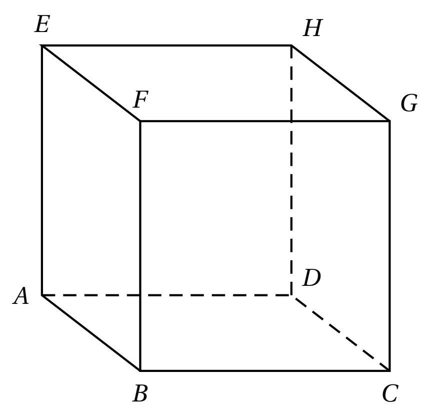
$$(P_2) \qquad \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

Partie A

L'implication (P_2) est-elle vraie ?

Partie B

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** Vérifier que le plan d'équation $x+y+z=1$ est le plan (BDE).
   b. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
   c. Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.
2. Le triangle BDE est-il équilatéral ?
3. Soit M un point de l'espace.
   a. Démontrer que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 = AK^2 + MK^2$.
   b. En déduire que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 \geqslant AK^2$.
   c. Soient x, y et z des réels quelconques. En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, montrer que l'implication (P_1) est vraie.

EXERCICE 3 (Nlle-Calédonie - 03/16) **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A(1 ; 1 ; 1) appartient-il au plan P_m ?

2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d)\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 12-2t \\ y & = & 9-2t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

3. **a.** Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.

b. Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.

c. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10 \leqslant m \leqslant 10 \quad \text{et} \quad -10 \leqslant m' \leqslant 10.$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

b. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)\left(m'-1\right) + \frac{mm'}{4} = 0.$$

c. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $\left(mm'\right)^2 + 16(m-1)\left(m'-1\right) + 4mm' = 0$
	Alors Afficher $\left(m\ ;\ m'\right)$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Quel est le rôle de cet algorithme ?

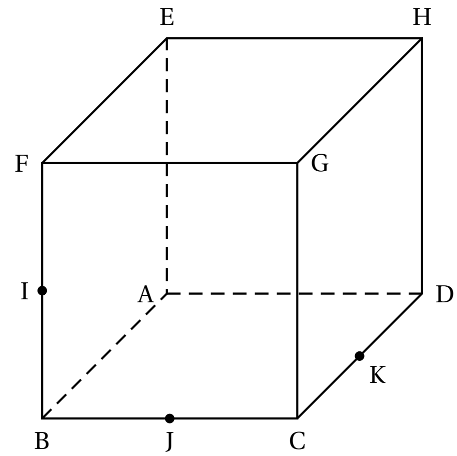
d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\ ;\ 1)$, $(0\ ;\ 1) et (5\ ;\ -4)$.

Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

EXERCICE 3 (Pondichéry - 22/04/16) **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [CD].



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(\mathrm{A} ; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est normal au plan (IJK).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = t\overrightarrow{\mathrm{AG}}$.

   a. Démontrer que $M\mathrm{I}^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

   b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $M\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.
4. Démontrer que pour ce point $M\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$:

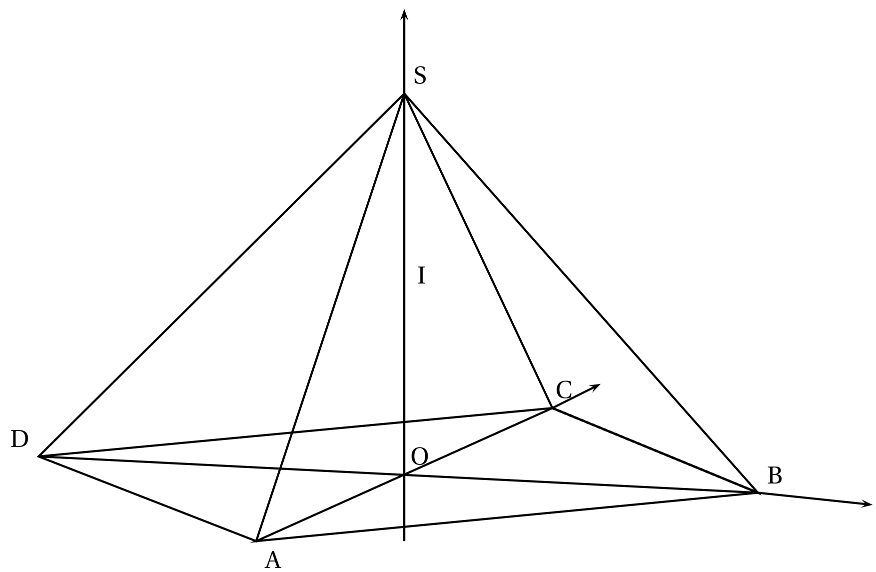
   a. M appartient au plan (IJK).

   b. La droite (IM) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

Exercice 4 **(Amérique du Nord - 01/06/2016)** **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.
On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OC},\,\overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OC},\,\overrightarrow{OS}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment [SO].

a. Déterminer les coordonnées du point K.

b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c. On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OC},\,\overrightarrow{OS}\right)$.

a. Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

c. Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

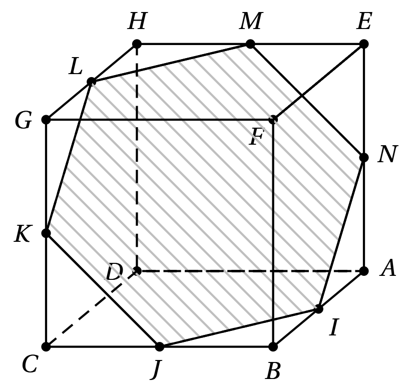
EXERCICE 4 (Antilles-Guyane - 20/06/2016) **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DC}\,,\overrightarrow{DA}\,,\overrightarrow{DH}\,)$.

Dans ce repère, on a :
$D(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1\,;\,0)$, $H(0\,;\,0\,;\,1)$ et $E(0\,;\,1\,;\,1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.
3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).
   b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ son sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.*

EXERCICE 1 (Liban - 31/05/2016) **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AK}\right)$.

1. **a.** Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

   b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

   a. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

   b. Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

   c. Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide ADECBF par le plan (EMN).

EXERCICE 2 (Métropole-La Réunion - 20/06/2016) **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\,,\,\overrightarrow{k}\right)$ on donne les points :

$$A(1\,;\,2\,;\,3), B(3\,;\,0\,;\,1), C(-1\,;\,0\,;\,1), D(2\,;\,1\,;\,-1), E(-1\,;\,-2\,;\,3) \text{ et } F(-2\,;\,-3,4).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\overrightarrow{n}\,(0\,;\,1\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.