EXERCICE 4 (Pondichéry - 17/04/2015) **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $\text{M}\left(1 ; 1 ; \dfrac{3}{4}\right)$, $\text{N}\left(0 ; \dfrac{1}{2} ; 1\right)$, $\text{P}\left(1 ; 0 ; -\dfrac{5}{4}\right)$.

1. Voir la figure à la fin.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$. $\overrightarrow{\text{MN}}\left(-1 ; -\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{\text{MP}}\ (0 ; -1 ; -2)$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$ ne sont pas colinéaires, les droites (MN) et (MP) ne sont pas parallèles donc les points M, N et P ne sont pas alignés.
3. **a.** $-1\times 0+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-1)+\left(\dfrac{1}{4}\right)\times(-2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

   b. L'algorithme 1 calcule le produit scalaire $\overrightarrow{\text{MN}}\cdot\overrightarrow{\text{MP}}=0$, donc les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires : le triangle MNP est donc rectangle en M.
4.
5. **a.** Si n est un vecteur normal au plan (MNP) une équation de celui-ci est : $5x-8y+4z=d$, avec $d\in\mathbb{R}$;

   $\text{N}\in(\text{MNP}) \iff -8\times\dfrac{1}{2}+4\times 1=d= \iff 0=d$

   Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc $5x-8y+4z=0$.

   b. On traduit la relation vectorielle : $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in\Delta \iff \overrightarrow{\text{F}M}=t\overrightarrow{n}, t\in\mathbb{R}$ soit

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 5t\\ y-0 &=& -8t\\ z-1 &=& 4t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+5t\\ y &=& -8t\\ z &=& 1+4t\end{array}\right.$$
6. **a.** Les coordonnées de K vérifient l'équation du plan et l'équation paramétrique de Δ, soit :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} 5x-8y+4z &=& 0\\ x &=& 1+5t\\ y &=& -8t\\ z &=& 1+4t\end{array}\right. \Rightarrow 5(1+5t)-8\times(-8t)+4(1+4t)=0 \iff$$

   $105t+9=0 \iff t=-\dfrac{9}{105} \iff t=-\dfrac{3}{35}$.

   D'où $x=1+5\times\left(-\dfrac{3}{35}\right)=1-\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7}$;

   $y=-8\times\left(-\dfrac{3}{35}\right)=\dfrac{24}{35}$;

   $z=1+4\times\left(-\dfrac{3}{35}\right)=1-\dfrac{12}{35}=\dfrac{23}{35}$.

   Donc $\text{F}\left(\dfrac{4}{7} ; \dfrac{24}{35} ; \dfrac{23}{35}\right)$.

   b. Puisque (FK) est orthogonale au plan MNP, [FK] est hauteur du tétraèdre MNPF, donc

   $V_{\text{MNPF}}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{MNP}\times\text{FK})$.

   Or MNP est rectangle en M, donc $\mathscr{A}(\text{MNP}=\dfrac{\text{MN}\times\text{MP}}{2}$.

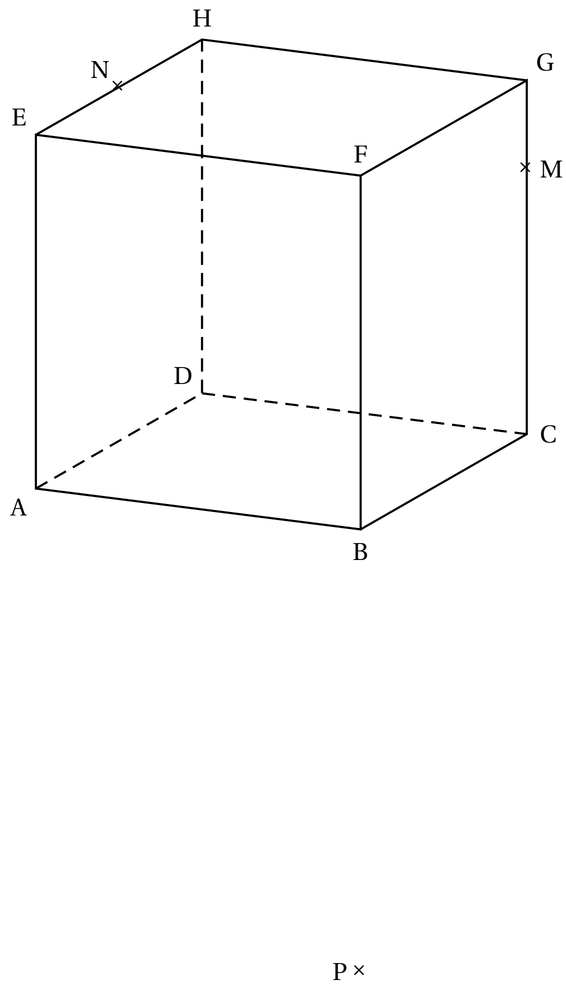
   $\text{MN}^2=1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{21}{16}\Rightarrow\text{MN}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}$;

   $\text{MP}^2=1+4=5\Rightarrow\text{MP}=\sqrt{5}$;

   Donc $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{21}}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{\dfrac{27}{35}}=\dfrac{1}{24}\times\sqrt{\dfrac{21\times 27}{35}}\times\sqrt{5}=$
   $\dfrac{1}{24}\times\sqrt{\dfrac{81}{5}}\times\sqrt{5}=\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$.

ANNEXE à remettre avec la copie

EXERCICE 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
l prend la valeur $d^2 + e^2 + f^2$
m prend la valeur $g^2 + h^2 + i^2$
Si $k = 0$ et si $l = m$
    Afficher : « Le triangle MNP est rectangle isocèle en M »
Sinon Afficher : « Le triangle MNP n'est pas rectangle ou n'est pas isocèle en M »

EXERCICE 1 (Liban - 27/05/15) **5 points**

1. **a)** De $\text{I}\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$, $\text{J}\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ et $\text{K}\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$, on déduit :
$\overrightarrow{\text{IJ}}\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ et $\overrightarrow{\text{JK}}\ (1\ ;\ 0\ ;\ -1)$.
D'autre part $\overrightarrow{\text{FD}}\ (-1\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et :
$\overrightarrow{\text{FD}} \cdot \overrightarrow{\text{IJ}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ et $\overrightarrow{\text{FD}} \cdot \overrightarrow{\text{JK}} = -1 + 1 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{\text{FD}}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) est normal à ce plan.

   b) D'après la question précédente : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \text{(IJK)} \iff -x + y - z + d = 0$.
En particulier $\text{I} \in \text{(IJK)} \iff -\frac{1}{2} + d = 0 \iff d = \frac{1}{2}$.
Donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \text{(IJK)} \iff -x + y - z + \frac{1}{2} = 0 \iff x - y + z - \frac{1}{2} = 0$.

2. On a $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \text{(FD)} \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\text{F}M} = t\overrightarrow{\text{FD}} \iff$
$$\left\{\begin{array}{rcr} x-1 &=& -t\\ y-0 &=& t\\ z-1 &=& -t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1-t\\ y &=& t\\ z &=& 1-t\end{array}\right..$$

3. $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à (FK) et à (IJK) si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite et celle du plan soit :
$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1-t\\ y &=& t\\ z &=& 1-t\\ x-y+z-\frac{1}{2} &=& 0\end{array}\right. \Rightarrow 1-t-t+1-t-\frac{1}{2} = 0 \iff -3t+\frac{3}{2} = 0 \iff$$
$t = \frac{1}{2}$.
D'où les coordonnées de $M\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

4. $\text{IJ}^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{6}{4}$; de même $\text{IK}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{2}{4}$ et $\text{JK}^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$.
Or $\frac{6}{4} + \frac{2}{4} = 2 \iff \text{IJ}^2 + \text{IK}^2 = \text{JK}^2$ égalité qui montre d'après la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle IJK est rectangle en I.
L'aire du triangle (IJK) est donc égale à :
$\mathscr{A}\text{(IJK)} = \dfrac{1}{2} \times \text{IJ} \times \text{IK} = \dfrac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. $\mathscr{V}\text{(FIJK)} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}\text{(IJK)} \times \text{FM}$.
$\text{F}M^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{F}M = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc $\mathscr{V}\text{(FIJK)} = \dfrac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}$.

6. Vérifions si $\text{L}\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ appartient au plan IJK :
$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ est vraie, donc les quatre loints I, J, K et L sont coplanaires.
Vérifions si (IJ) est parallèle à (KL) :
$\overrightarrow{\text{IJ}}\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ et $\overrightarrow{\text{KL}}\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites coplanaires (IJ) et (KL) sont sécantes.

Exercice 1 (Amérique du Nord - 2/06/15)

Partie A

1. On peut utiliser ici le théorème de Thalès pour prouver que $\overrightarrow{BU} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BS}$ et ainsi construire le point. Pour cela considérons le triangle SOB.
Nous savons que (DU) est parallèle à (OB) car D et U partagent la même cote et O et B sont également de même cote. Nous savons également que $\dfrac{OD}{OS} = \dfrac{1}{3}$, là encore en raison de la cote de D et S. On en déduit, par application de l'antique théorème, que $\dfrac{BU}{BS} = \dfrac{OD}{OS} = \dfrac{1}{3}$.
2. Considérons les plans (AUE) et (BCS). Ces plans sont sécants en la droite (UV). Or, (BC), incluse dans (BCS), est parallèle à (AE), incluse dans (AEU) ; puisque $ABCE$ est un carré.
Par application du théorème du toit, on en déduit que (UV) est parallèle à (BC). Cette dernière propriété permet de construire le point V.
3. Il nous faut prouver d'une part que K appartient à (AE) et d'autre part que (KU) est perpendiculaire à (AE).
On lit les coordonnées de $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et celles de $E\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ et on calcule ainsi $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. D'autre part on détermine $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{-1}{6}\\\frac{-1}{6}\\0\end{pmatrix}$.
On en déduit que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AE}$, ce qui prouve que K est un point de $[AE]$.
Déterminons les coordonnées de U. On a démontré dans la question 1 que $\overrightarrow{BU} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BS}$, ce qui donne un système portant sur les coordonnées de U :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_u - 0 & = & \frac{1}{3}(0-0) \\ y_u - 1 & = & \frac{1}{3}(0-1) \\ z_u & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_u & = & 0 \\ y_u & = & \frac{2}{3} \\ z_u & = & 1 \end{array}\right.$$
On peut maintenant déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{KU}\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{5}{6}\\1\end{pmatrix}$.
On obtient ainsi, sachant que le repère est orthonormé : $\overrightarrow{KU}\cdot\overrightarrow{AE} = \dfrac{-5}{6}\times(-1) + \dfrac{5}{6}\times(-1) + 1\times 0 = 0$, ce qui permet de conclure. Le point K est bien le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.

> On pouvait également déterminer une équation paramétrique de (BS) afin de calculer les coordonnées de U.
> Une telle méthode revient à chercher le réel t tel que $\overrightarrow{BU} = t\overrightarrow{BS}$ avec la cote de U égale à 1.

Partie B

1. Il suffit de s'assurer que les points A, E et U vérifient bien l'équation proposée.
Pour le point A, on a bien $3\times 1 - 3\times 0 + 5\times 0 - 3 = 0$.
De même pour le point E, il est clair que $3\times 0 - 3\times(-1) + 5\times 0 - 3 = 0$.
Et enfin, pour le point U, on vérifie mentalement que $3\times 0 - 3\times\dfrac{2}{3} + 5\times 1 - 3 = 0$.
Cette équation de plan convient donc.

2. Puisque l'on a muni l'espace d'un repère orthonormé, on déduit de l'équation cartésienne proposée les coordonnées d'un vecteur normal au plan (EAU). Notons $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$ ce vecteur.

C'est un vecteur directeur de (d) puisque (d) est orthogonale au plan (EAU). À partir des coordonnées du point S et de celles de ce vecteur, on en déduit une équation paramétrique de (d) :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3t \\ y & = & -3t \\ z & = & 3+5t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. Les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de ce point satisfont simultanément une équation paramétrique de (d) ainsi qu'une équation cartésienne du plan (EAU). On cherche donc x, y, z et t tels que :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3t \\ y & = & -3t \\ z & = & 3+5t \\ 0 & = & 3x-3y+5z-3 \end{array}\right.$$

À partir de l'équation cartésienne du plan, en substituant x, y et z on en déduit le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3t \\ y & = & -3t \\ z & = & 3+5t \\ 0 & = & 3(3t)-3(-3t)+5(3+5t)-3 \end{array}\right.$$

La dernière équation permet de déterminer $t = \dfrac{-12}{43}$ et, par suite, on peut déterminer les coordonnées de $H\begin{pmatrix}\frac{-36}{43}\\\frac{36}{43}\\\frac{69}{43}\end{pmatrix}$.

4. Le plan (EAU) coupe le pyramide $SABCE$ en un solide $ABUECV$ d'une part et une pyramide $SAUVE$ d'autre part. Il nous faut donc déterminer si ces deux solides ont le même volume ; ce qui revient à déterminer si le volume de l'un des deux solides correspond à la moitié de celui de $SABCE$.

Or toutes les questions précédentes nous ont permis de rassembler des éléments permettant de calculer le volume de la pyramide $SAUVE$. Nous connaissons en effet l'aire de sa base $\mathscr{A}_{AUVE} = \dfrac{5\sqrt{43}}{18}$.

Reste à calculer sa hauteur SH. On a ainsi :

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{\left(\frac{-36}{43}-0\right)^2+\left(\frac{36}{43}-0\right)^2+\left(3-\frac{69}{43}\right)^2} \\ &= \frac{12}{\sqrt{43}} \end{aligned}$$

Le volume de la pyramide $SAUVE$ est donc $\mathscr{V}_{SAUVE} = \dfrac{1}{3}\mathscr{A}_{AUVE} \times SH$, ce qui donne après calcul : $\mathscr{V}_{SAUVE} = \dfrac{10}{9}$.

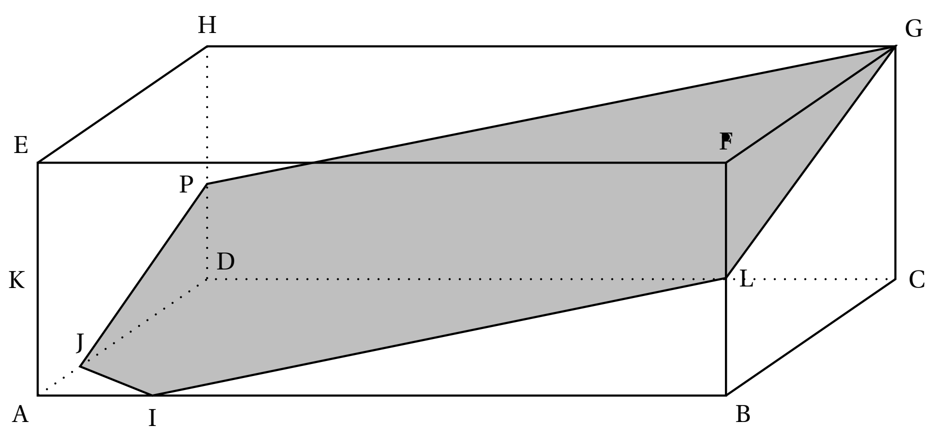
Pour finir, déterminons le volume de la grande pyramide $SABCE$. On peut, par application du théorème de Pythagore au triangle ABO rectangle en O prouver que $AB = \sqrt{2}$. Sa base a donc pour aire $AB^2 = 2$. D'autre part, sa hauteur est $SO = 3$. Le volume de la grande pyramide est donc $\mathscr{V}_{SABCE} = \dfrac{1}{3}AB^2 \times SO = 2$.

On constate que $\dfrac{1}{2}\mathscr{V}_{SABCE} \neq \mathscr{V}_{SAUVE}$, ce qui permet de conclure.

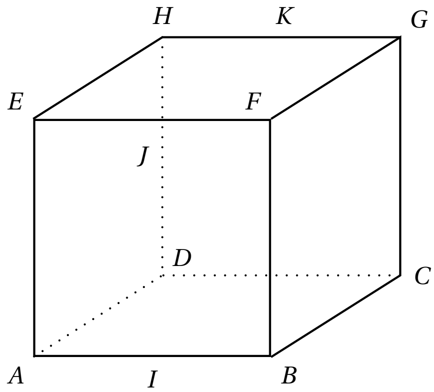
EXERCICE 1 (Polynésie - 12/06/15) **3 points**

Commun à tous les candidats

1. $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{AI} \iff B(6\,;\,0\,;\,0)$;
   $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AJ} \iff D(0\,;\,4\,;\,0)$;
   $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE} \iff \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AK} \iff K(0\,;\,0\,;\,2)$.
   Comme $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 6\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AK}$, donc $G(6\,;4\,;2)$.
   On en déduit que $\overrightarrow{IG}\,(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{JG}\,(6\,;\,3\,;\,2)$.
   Or $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IG} = -2+2+0 = 0$ et
   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{JG} = 12+6-18 = 0$.
   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc normal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (IJG) est normal à ce plan.
2. On sait qu'alors une équation du plan (IJG) est :
   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IJG) \iff 2x+2y-9z+d = 0$.
   En particulier : $I(1\,;\,0\,;\,0) \in (IJG) \iff 2+0-0+d = 0 \iff d = -2$.
   Une équation du plan (IJG) est : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IJG) \iff 2x+2y-9z-2 = 0$.
3. On a$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, donc $F(6\,;0\,;2)$.
   Or $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (BF) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BF} \iff$
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x-6 &=& t(6-6)\\ y-0 &=& t(0-0)\\ z-0 &=& t(2-0)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6\\ y &=& 0\\ z &=& 2t\end{array}\right.$$
   Donc si $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IJG) \cap (BF)$ ses coordonnées vérifient le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6\\ y &=& 0\\ z &=& 2t\\ 2x+2y-9z-2 &=& 0\end{array}\right. \Rightarrow 2\times 6+0-9\times 2t-2 = 0 \iff 10-18t = 0 \iff$$
   $10 = 18t \iff t = \dfrac{5}{9}$.
   En remplaçant t par $\dfrac{5}{9}$ dans l'équation de la droite (BF), on obtient :
   $L\left(6\,;\,0\,;\,\dfrac{10}{9}\right)$.
4. La section avec (ABCD) est la droite (IJ).
   La section avec (ABFE) est la droite (IL).
   La section avec (BCGF) est la droite (LG).
   Il reste à trouver l'intersection P du plan (IJG) avec la droite (HD) : comme les plans (ABFE) et (DCGH) sont parallèles, les droites (IJ) et (GP) sont parallèles.
   On trace donc la parallèle à (IL) contenant G qui coupe (HD) en P.
   La section est donc le pentagone JILGP (voir à la fin).



EXERCICE 3 (Polynésie - 9/09/15) **3 points**



$ABCDEFGH$ est un cube.
I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[HD]$ et K est le milieu de $[HG]$.
On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

On détermine les coordonnées tous les points de la figure dans le repère donné :

$A(0\,;0\,;0)$ $\quad B(1\,;0\,;0)$ $\quad D(0\,;1\,;0)$ $\quad E(0\,;0\,;1)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Longrightarrow C(1\,;1\,;0)$ $\qquad \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\Longrightarrow F(1\,;0\,;1)$

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\Longrightarrow H(0\,;1\,;1)$ $\qquad \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\Longrightarrow G(1\,;1\,;1)$

I est le milieu de $[AB]$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} x_I &=& \dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_I &=& \dfrac{y_A+y_B}{2}\\ z_I &=& \dfrac{z_A+z_B}{2}\end{array}\right.$ et donc $I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;0\right)$

On trouve de même : $J\left(0\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $K\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;1\right)$

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_E-x_C &=& -1\\ y_E-y_C &=& -1\\ z_E-z_C &=& 1\end{array}\right.$; celles de $\overrightarrow{IJ}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_J-x_I &=& -\dfrac{1}{2}\\ y_J-y_I &=& 1\\ z_J-z_I &=& \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

et celles de $\overrightarrow{IK}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_K-x_I &=& 0\\ y_K-y_I &=& 1\\ z_K-z_I &=& 1\end{array}\right.$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IJ}=(-1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(-1)\times 1+1\times\dfrac{1}{2}=0$ donc $\overrightarrow{CE}\perp\overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IK}=0+(-1)\times 1+1\times 1=0$ donc $\overrightarrow{CE}\perp\overrightarrow{IK}$

Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ du plan (IJK), donc il est normal au plan (IJK).

2. Les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_D-x_B &=& -1\\ y_D-y_B &=& 1\\ z_D-z_B &=& 0\end{array}\right.$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BD}=(-1)(-1)+(-1)\times 1+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{CE}\perp\overrightarrow{BD}$

Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CE}$ qui est un vecteur normal au plan (IJK) donc la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

On pourrait préciser la réponse en démontrant que la droite (BD) n'est pas contenue dans le plan (IJK) mais ce n'est pas explicitement demandé dans le texte.

Si le point B appartient au plan (IJK), on peut dire que le point A, appartenant à la droite (BI), appartient aussi à ce plan donc les plans (ABD) et (IJK) sont confondus, ce qui est faux.

3. Soit M un point de la droite (CE) donc les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires.

On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CE}$ (où $k \in \mathbb{R}$), ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{l c l} x_M - x_C & = & k \times (-1) \\ y_M - y_C & = & k \times (-1) \\ z_M - z_C & = & k \times 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x_M & = & 1-k \\ y_M & = & 1-k \\ z_M & = & k \end{array}\right.$

Le plan (BDM) et le plan (IJK) sont parallèles, s'ils ont les mêmes vecteurs normaux ; autrement dit pour que le plan (BDM) soit parallèle au plan (IJK) il faut et il suffit que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ qui est normal au plan (IJK) soit également normal au plan (BDM).

Comme ce vecteur est déjà orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BD}$, il suffit qu'il soit orthogonal à un deuxième vecteur directeur du plan (BDM) non colinéaire à $\overrightarrow{BD}$, soit $\overrightarrow{BM}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $\left\{\begin{array}{l c c c l} x_M - x_B & = & 1-k-1 & = & -k \\ y_M - y_B & = & 1-k-0 & = & 1-k \\ z_M - z_B & = & k-0 & = & k \end{array}\right.$

$\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{CE} \iff \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CE} = 0 \iff (-k) \times (-1) + (1-k) \times (-1) + k \times 1 = 0 \iff k - 1 + k + k = 0$

$\iff k = \dfrac{1}{3}$

Donc M a pour coordonnées $\left(1 - \dfrac{1}{3} ; 1 - \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$

EXERCICE 2 (Métropole - 22/06/15)

3 POINTS Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5), B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

1. **a.** Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\overrightarrow{OI}$.

La droite (AB) est donc parallèle à l'axe (OI).

b. On a $x_C = x_D = 11$ donc la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$ d'équation $\boxed{x = 11}$.

c. (AB) est parallèle à (OI) et (OI) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ donc (AB) est orthogonale à $\mathscr{P}$.

Le point d'intersection E a des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ et la représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.

On doit avoir : $\left\{\begin{array}{l} x = 11\\ x = t\\ y = -1\\ z = 5\end{array}\right.$ donc $\boxed{\text{E}(11\ ;\ -1\ ;\ 5)}$.

d. Une représentation paramétrique de (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x = t\\ y = -1\\ z = 5\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et

une représentation paramétrique de (CD) est $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 11\\ y &=& 0,8t'\\ z &=& 1+0,6t'\end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.

On résout le système $\left\{\begin{array}{lcl} t &=& 11\\ -1 &=& 0,8t'\\ z &=& 1+0,6t'\end{array}\right.$ qui n'a pas de solutions, car on trouve t' négatif, donc $1+0,6t' < 5$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. **a.** $\overrightarrow{M_tN_t}\begin{pmatrix}11-t\\0,8t+1\\0,6t-4\end{pmatrix}$ donc $M_tN_t^2 = (11-t)^2+(0,8t+1)^2+(0,6t-4)^2$

$= 121-22t+t^2+0,64t^2+1,6t+1+0,36t^2-4,8t+16 =$

$\boxed{M_tN_t^2 = 2t^2-25,2t+138}$.

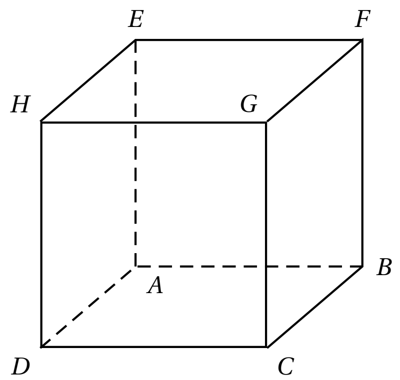
b. M_tN_t est positif, donc est minimale quand son carré est minimal.

On considère la fonction $f : t \mapsto 2t^2-25,2t+138$; f est une fonction du second degré ; le coefficient de t^2 est 2. Le minimum est atteint pour $t = \dfrac{25,2}{4} = 6,3$.

La distance est **minimale** pour $\boxed{t = 6,3 \text{ s}}$

EXERCICE 4 (Antilles-Guyane - 9/09/15) **5 points**

Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$.
Donc $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$ et $E(0\,;0\,;1)$

1. **a.** La droite (DB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DB}\,(1\,;-1\,;0)$. Elle passe par le point D. C'est donc l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{DM} = s\overrightarrow{DB}$ où $s \in \mathbb{R}$.

   Cela s'écrit $\left\{\begin{array}{rcl} x-0 &=& 1\times s \\ y-1 &=& (-1)\times s \\ z-0 &=& 0\times s \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& s \\ y &=& 1-s \\ z &=& 0 \end{array}\right.$ où $s \in \mathbb{R}$

   b. La droite (AG) est l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AG}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$ où $t \in \mathbb{R}$.

   $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc G a pour coordonnées $(1\,;1\,;1)$.

   $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-0 &=& 1\times t \\ y-0 &=& 1\times t \\ z-0 &=& 1\times t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& t \\ z &=& t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG). Le point M a donc pour coordonnées $(s\,;\,1-s\,;\,0)$ où $s \in \mathbb{R}$, et le point N a pour coordonnées $(t\,;\,t\,;\,t)$ où $t \in \mathbb{R}$.
   Alors $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(t-s\,;\,t-1+s\,;\,t)$.
   La droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si d'une part les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux, et si d'autre part les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux.; autrement dit si $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{AG} = 0$ et $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{DB} = 0$.

   $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{AG} = 0 \iff (t-s)\times 1+(t-1+s)\times 1+t\times 1 = 0 \iff t-s+t-1+s+t = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \dfrac{1}{3}$

   $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{DB} = 0 \iff (t-s)\times 1+(t-1+s)\times(-1)+t\times 0 = 0 \iff t-s-t+1-s = 0 \iff 1 = 2s \iff s = \dfrac{1}{2}$

   Les coordonnées de M sont donc $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$ et celles de N sont $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

3. Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s\,;\,1-s\,;\,0)$ un point de la droite (DB) et $N(t\,;\,t\,;\,t)$ un point de la droite (AG).

   a. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(t-s\,;\,t-1+s\,;\,t)$ donc

   $MN^2 = (t-s)^2+(t-1+s)2+t^2 = t^2-2ts+s^2+t^2+1+s^2-2t-2s+2ts+t^2 = 3t^2-2t+2s^2-2s+1$

   $$3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6} = 3\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}\right)+2\left(s^2-s+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}$$
   $$= 3t^2-2t+\frac{1}{3}+2s^2-2s+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = 3t^2-2t+2s^2-2s+1$$

   Donc $MN^2 = 3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+2\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{6}$

b. La distance MN est minimale quand le nombre MN^2 est minimal ; MN^2 est la somme de trois nombres positifs ou nuls qui sera minimale si chaque nombre est minimal.

Autrement dit pour que MN^2 soit minimal, il faut que $\left(t - \dfrac{1}{3}\right)^2$ et $\left(s - \dfrac{1}{2}\right)^2$ soient minimaux.

Les carrés seront minimaux s'ils sont nuls donc pour $t = \dfrac{1}{3}$ et $s = \dfrac{1}{2}$.

Dans ce cas, on a vu que la droite (MN) était la perpendiculaire commune aux deux droites (AG) et (BD).

EXERCICE 3 (Nlle-Calédonie - 19/11/15) **5 points**

Commun à tous les candidats Partie A

Il suffit de prendre un contre-exemple pour montrer que (P_2) est fausse. Par exemple, le triplet (1; 1; 1) convient : $1^2+1^2+1^2=3 \geqslant \dfrac{1}{3}$ mais $1+1+1=3 \neq 1$.

Partie B

1. **a.** Il suffit de vérifier que les trois points non alignés B, D et E appartiennent au plan d'équation $x+y+z=1$.
   Avec $B\big(1\,;0\,;0\big)$, $D\big(0\,;1\,;0\big)$ et $E\big(0\,;0\,;1\big)$, c'est bien le cas :
   $$1+0+0=0+1+0=0+0+1=1.$$
   b. Il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE). Prenons $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$, par exemple. On a :
   $$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=-1+1+0=0 \Longrightarrow \overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BD}$$
   $$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-1+0+1=0 \Longrightarrow \overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BE}$$
   Donc la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
   c. D'après la question précédente, on sait que (AG) et (BDE) sont sécants en un unique point. Il suffit donc de prouver que K appartient à la droite et au plan.
   — Comme $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$, le point K appartient à (AG).
   — Comme $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=1$, le point K appartient à (BDE).
   Donc K est l'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).
2. Les côtés du triangle BDE sont les diagonales des faces du cube qui sont isométriques donc ils sont de même longueur et BDE est un triangle équilatéral.
3. **a.** Si M est un point du plan (BDE) distinct de K, d'après la question (**1b**), le triangle AMK est rectangle en K. D'après le théorème de Pythagore, on a alors :
   $$AM^2=AK^2+MK^2$$
   Si $M=K$, la relation est encore vraie donc elle est vraie pour tout point M de (BDE).
   b. Comme $MK^2 \geqslant 0$, la relation $AM^2 \geqslant AK^2$ se déduit trivialement de la précédente.
   c. Soient x, y et z trois nombres réels vérifiant l'égalité $x+y+z=1$. Le point $M\big(x;\,y;\,z\big)$ appartient donc au plan (BDE).
   D'après (**3b**), on a alors $AM^2 \geqslant AK^2$ qui s'écrit, avec les coordonnées :
   $$x^2+y^2+z^2 \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$$
   L'implication (P_1) est donc vraie.

EXERCICE 3 (Nlle-Calédonie - 03/16)

Commun à tous les candidats **6 points**

Dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$.

1. Le point A(1 ; 1 ; 1) appartient au plan P_m si et seulement si $\frac{1}{4}m^2x_A+(m-1)y_A+\frac{1}{2}mz_A-3=0 \iff$ $\frac{1}{4}m^2+(m-1)+\frac{1}{2}m-3=0 \iff \frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m-4=0 \iff m^2+6m-16=0$
   $\Delta=36+64=100$ donc cette équation admet 2 solutions $m'=\dfrac{-6+10}{2}=2$ et $m''=\dfrac{-6-10}{2}=-8$.
   Le point A appartient au plan P_m pour $m=2$ ou $m=-8$.
2. Le plan P_1 a pour équation $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}z-3=0$ ou encore $x+2z-12=0$.
   Le plan P_{-4} a pour équation $4x-5y-2z-3=0$.
   On cherche l'intersection de ces deux plans :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z-12&=&0\\ 4x-5y-2z-3&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&12-2z\\ -5y&=&-4(12-2z)+2z+3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&12-2z\\ -5y&=&-48+8z+2z+3\end{array}\right.$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&12-2z\\ -5y&=&-45+10z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&12-2z\\ y&=&9-2z\end{array}\right.$$
   En posant $z=t$, on peut dire que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x&=&12-2t\\ y&=&9-2t\\ z&=&t\end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$
3. **a.** Le plan P_0 a pour équation $-y-3=0$.
   Pour déterminer l'intersection du plan P_0 et de la droite (d), on résout le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x&=&12-2t\\ y&=&9-2t\\ z&=&t\\ -y-3&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&12-2t\\ -3&=&9-2t\\ z&=&t\\ y&=&-3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&12-2t\\ t&=&6\\ z&=&t\\ y&=&-3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&0\\ y&=&-3\\ z&=&6\\ t&=&6\end{array}\right.$$
   L'intersection du plan P_0 et de la droite (d) est donc le point B $(0; -3; 6)$.

   b. Le plan P_m a pour équation $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$.
   On regarde si les coordonnées du point B vérifient l'équation du plan P_m :
   $\frac{1}{4}m^2x_B+(m-1)y_B+\frac{1}{2}mz_B-3=0+(m-1)(-3)+\frac{1}{2}m\times 6-3=-3m+3+3m-3=0$
   Donc le point B appartient au plan P_m, quelle que soit la valeur du réel m.

   c. Soit H $(a; b; c)$ un point qui appartient au plan P_m pour tout réel m.
   Cela signifie que les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan pour tout réel m :
   $\frac{1}{4}m^2a+(m-1)b+\frac{1}{2}mc-3=0$
   On donne à m des valeurs particulières :
   - Pour $m=0$, on obtient $-b-3=0$ donc $b=-3$.
   - Pour $m=2$, on obtient $a+(2-1)(-3)+c-3=0$, soit $a+c=6$.
   - Pour $m=-2$, on obtient $a+(-2-1)(-3)-c-3=0$, soit $a-c=-6$.

   On résout le système $\left\{\begin{array}{rcl} a+c&=&6\\ a-c&=&-6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a&=&0\\ a+c&=&6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a&=&0\\ c&=&6\end{array}\right.$
   Le point H a donc pour coordonnées $(0; -3; 6)$ donc c'est le point B.
   Le point B est l'unique point appartenant à tous les plans P_m quelle que soit la valeur de m.
   Autre méthode géométrique :
   L'existence du point a été montrée en 3. b. Nous allons montrer son unicité.
   On sait (question 2) que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d).
   On sait (question 3. a.) que P_0 et (d) sont sécants en B.
   Le point B est donc l'unique point appartenant à P_0, P_1 et P_{-4}.
   Si un point appartient à P_m quel que soit m réel, alors il appartient en particulier à P_0, P_1 et P_{-4}. C'est donc l'unique point B.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10 \leqslant m \leqslant 10 \text{ et } -10 \leqslant m' \leqslant 10$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a. Le plan P_1 a pour équation $x+2z-12=0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_1\ (1\,;0\,;2)$.
Le plan P_{-4} a pour équation $4x-5y-2z-3=0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_{-4}\ (4\,;-5\,;-2)$.
$\overrightarrow{n}_1.\overrightarrow{n}_{-4} = 1\times 4+0+2\times(-2)=0$ donc les vecteurs sont orthogonaux.
Les plans P_1 et P_{-4} sont donc perpendiculaires.

b. Le plan P_m a pour équation $\dfrac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\dfrac{1}{2}mz-3=0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\ \left(\dfrac{1}{4}m^2\,;m-1\,;\dfrac{1}{2}m\right)$.

Le plan $P_{m'}$ a pour équation $\dfrac{1}{4}m'^2x+(m'-1)y+\dfrac{1}{2}m'z-3=0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}'\ \left(\dfrac{1}{4}m'^2\,;m'-1\,;\dfrac{1}{2}m'\right)$.

les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux :

$$P_m \perp P_{m'} \iff \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n}' \iff \overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}'=0 \iff \frac{1}{4}m\times\frac{1}{4}m'+(m-1)(m'-1)+\frac{1}{2}m\times\frac{1}{2}m'=0$$

$$\iff \left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\frac{mm'}{4}=0$$

c. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $\left(mm'\right)^2+16(m-1)\left(m'-1\right)+4mm'=0$
	Alors Afficher $\left(m\,;\ m'\right)$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Cet algorithme affiche tous les couples $(m\,;m')$ d'entiers compris entre -10 et 10 pour lesquels $\left(\dfrac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\dfrac{mm'}{4}=0$, c'est-à-dire pour lesquels les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\,;\ 1)$, $(0\,;\ 1)$ et $(5\,;\ -4)$.
Le nombres m et m' jouant le même rôle, les autres couples seront $(1\,;\ -4)$, $(1\,;\ 0)$ et $(-4\,;\ 5)$.
Les six couples seront affichés dans cet ordre :

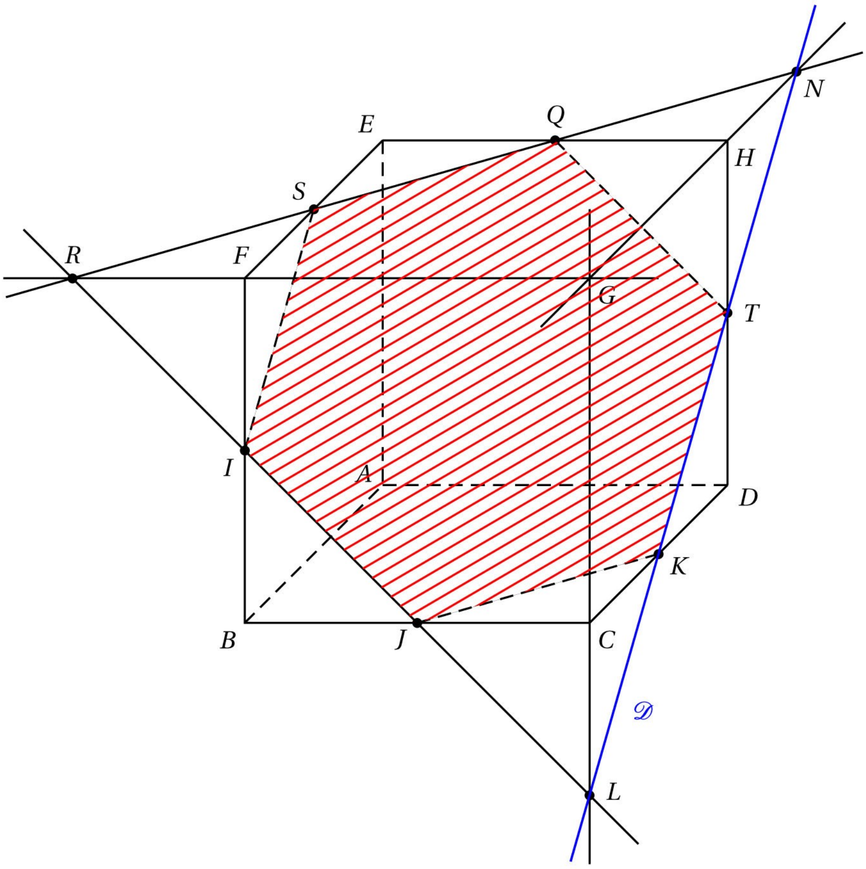
$$(-4\,;\ 1)\,;(-4\,;\ 5)\,;(0\,;\ 1)\,;(1\,;\ -4)\,;(1\,;\ 0)\,;(5\,;\ -4)$$

Exercice 3 (Pondichéry - 22/04/16) **5 points**

Partie A

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.

On construit :
- le point L ;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).



Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des sommets du cube sont :
   $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$, $C(1\,;1\,;0)$, $F(1\,;0\,;1)$, $H(0\,;1\,;1)$, $G(1\,;1\,;1)$.

   Le point I est le milieu de $[BF]$ donc I a pour coordonnées $\left(1\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

   Le point J est le milieu de $[BC]$ donc J a pour coordonnées $\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$.

   Le point K est le milieu de $[CD]$ donc K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;0\right)$.

2. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a les mêmes coordonnées que le point G c'est-à-dire $(1\,;\,1\,;\,1)$.

- $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(1-1\,;\,\dfrac{1}{2}-0\,;\,0-\dfrac{1}{2}\right)=\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$.

  $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IJ}=1\times 0+1\times\dfrac{1}{2}+1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{IJ}$

- $\overrightarrow{JK}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}-1\,;\,1-\dfrac{1}{2}\,;\,0-0\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$.

  $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{JK}=1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1\times\dfrac{1}{2}+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{JK}$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ ne sont pas colinéaires ; le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) donc il est normal au plan (IJK).

b. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) ; le plan (IJK) est l'ensemble des points $P\left(x\,;\,y\,;\,z\right)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{IP}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AG}$:

Le vecteur $\overrightarrow{IP}$ a pour coordonnées $\left(x-1\,;\,y-0\,;\,z-\dfrac{1}{2}\right)=\left(x-1\,;\,y\,;\,z-\dfrac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IP}=0 \iff 1\times(x-1)+1\times y+1\times\left(z-\dfrac{1}{2}\right)=0 \iff x+y+z-\dfrac{3}{2}=0$

Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-\dfrac{3}{2}=0$.

3. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AG}$; donc le point M a pour coordonnées $(t\,;\,t\,;\,t)$.

a. $IM^2=(t-1)^2+(t-0)^2+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2=t^2-2t+1+t^2+t^2-t+\dfrac{1}{4}=3t^2-3t+\dfrac{5}{4}$

b. Le trinôme ax^2+bx+c avec $a>0$ est minimal pour $x=-\dfrac{b}{2a}$, donc $3t^2-3t+\dfrac{5}{4}$ est minimal pour $t=-\dfrac{-3}{2\times 3}$ donc pour $t=\dfrac{1}{2}$.

MI^2 donc MI est minimal pour $t=\dfrac{1}{2}$; cela correspond au point M_m de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

4. **a.** Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-\dfrac{3}{2}=0$ et le point M_m a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

$x_{M_m}+y_{M_m}+z_{M_m}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}=0$ donc $M_m\in(IJK)$

b. Les points I et M_m appartiennent au plan (IJK) et le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) ; on en déduit que les droites (IJ) et (AG) sont orthogonales.

Mais le point M_m est le milieu de $[AG]$ donc il appartient à (AG).

On peut donc en déduire que les droites (IM_m) et (AG) sont perpendiculaires en M_m.

Le vecteur $\overrightarrow{IM_m}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}-1\,;\,\dfrac{1}{2}-0\,;\,\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}$ donc le vecteur $\overrightarrow{BF}$ a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,1)$.

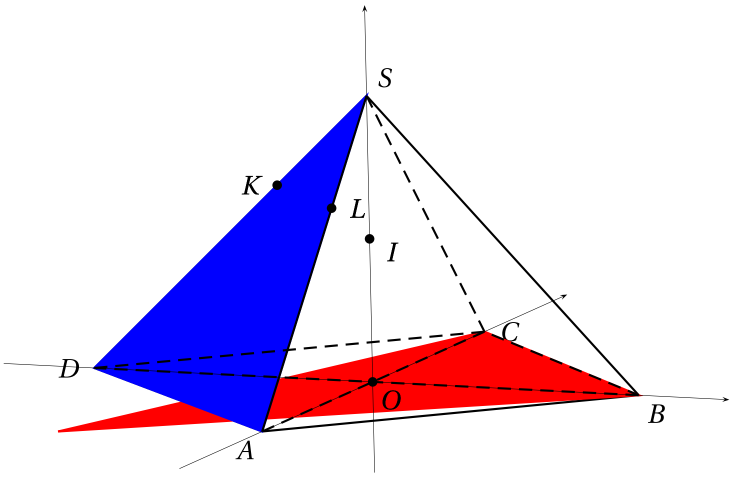
$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{IM_m}=0\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+0\times\dfrac{1}{2}+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{IM_m}$ donc la droite (IM_m) est orthogonale à la droite (BF).

Mais le point I appartient aux deux droites (IM_m) et (BF) donc on peut dire que les droites (IL) et (BF) sont perpendiculaires en I.

EXERCICE 4 (Amérique du Nord - 01/06/2016) **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.
On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

> **Solution:** On sait que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et de même longueur, on en déduit que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux et de même norme 1.
> (SO) est la hauteur de la pyramide, elle est donc perpendiculaire à la bas $ABCD$, on en déduit que $\overrightarrow{OS}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OB}$ et à $\overrightarrow{OC}$
> de plus on sait que SOC est rectangle en O avec $OC = OB = 1$ et $SC = \sqrt{2}$ donc $SO = 1$
> Finalement $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment [SO].

a. Déterminer les coordonnées du point K.

> **Solution:** Dans $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ on a $S(0\,;\,0\,;\,1)$, $D(-1\,;\,0\,;\,0)$
> donc $\overrightarrow{SD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. On en déduit $K\left(-\frac{1}{3}\,;\,0\,;\,\frac{2}{3}\right)$

b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.

Solution: $I\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et $B(1\,;\,0\,;\,0)$

donc $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{3}\\0\\\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{BK}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{BI}$

On peut donc conclure que B, I et K sont alignés

c. On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

Solution: (BCI) coupe (ABC) suivant la droite (BC)
(SAD) coupe (ABC) suivant la droite (AD)
or $(AD)//(BC)$ donc d'après le théorème du toit, (BCI) et (SAD) se coupent suivant une parallèle à (AD) et comme on sait déjà que K appartient à cette intersection, on en déduit que la parallèle à (AD) passant par K appartient à (BCI) et coupe $[SA]$
On a bien $(AD)//(KL)$

d. Déterminer les coordonnées du point L.

Solution:
$(KL)//(AD)$ donc K et L ont la même cote
$L\in(SOC)$ donc son abscisse est nulle
$L\left(0\,;\,y_L\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$
Dans SAD, on a $K\in[SD]$, $L\in[SA]$ et $(KL)//(AD)$ donc d'après le théorème de Thalès on a $\dfrac{SL}{SA}=\dfrac{SK}{SD}\iff SL=SK$ car $SA=SD$
$SK^2=\dfrac{2}{9}$ voir 2.a. or $SL^2=y_L^2+\dfrac{1}{9}\Longrightarrow y_L^2=\dfrac{1}{9}$ or $y_L<0$

Finalement $L\left(0\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$

3. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\,,\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right)$.

a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

Solution: $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI}=0$

Donc $\vec{n}$ est normal au plan (BCI) car il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DS}}$ sont coplanaires.

Solution: $\overrightarrow{\mathrm{AS}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DS}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

on remarque que $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\mathrm{AS}} + \overrightarrow{\mathrm{DS}}$ donc $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DS}}$ sont coplanaires

c. Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

Solution: $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BCI) et $\overrightarrow{n}$ est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires du plan (SAD)

On en déduit que $(BCI) \perp (SAD)$

EXERCICE 4 (Antilles-Guyane - 20/06/2016) **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times0+1\times(-1)+1\times1 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BE} = 1\times(-1)+1\times0+1\times1 = 0.$$

On en déduit que

$$(DF)\perp(BG) \quad \text{et} \quad (DF)\perp(BE).$$

La droite (DF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BGE), elle est donc orthogonale à ce plan, et le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est donc un vecteur normal au plan (BGE).

b. Les plans $\mathscr{P}$ et (BGE) sont parallèles, le vecteur $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est donc également un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Ce dernier a donc une équation cartésienne du type :

$$x+y+z+d=0$$

où d est un réel à déterminer. Le plan $\mathscr{P}$ passe par le point $I\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$, donc

$$\frac{1}{2}+1+0+d=0 \iff d=-\frac{3}{2}.$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est donc $\boxed{x+y+z-\frac{3}{2}=0}$.

2. Les plans $\mathscr{P}$ et (BGE) sont parallèles. Leurs intersections respectives avec le plan (ABE) sont donc deux droites parallèles. L'une de ces droites est (IN), l'autre est (BE). Ainsi dans le triangle ABE les droites (IN) et (BE) sont parallèles et I est le milieu de $[AB]$, donc d'après le théorème « de la droite des milieux » le point N est le milieu de $[AE]$.

3. **a.** La droite (HB) passe par le point $H(0\,;\,0\,;\,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& t \qquad (t\in\mathbb{R})\\ z &=& 1-t\end{array}\right. .$$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (HG) est le plan $\mathscr{P}$ sont donc sécants en un unique point T. Comme $T\in(HG)$, il existe un réel t tel que $T(t\,;\,t\,;\,1-t)$. Alors :

$$T\in\mathscr{P} \iff t+t+1-t-\frac{3}{2}=0 \iff t=\frac{1}{2},$$

les coordonnées de T sont donc $T\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

4. Le tétraèdre $FBGE$
   — a pour base le triangle FBG qui est rectangle isocèle en F et a pour aire $\mathscr{B}=\frac{1}{2}\times FE\times FB=\frac{1}{2}$;
   — pour hauteur $h=FE=1$.

   Le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $FBGE$ est donc

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathscr{B}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}.$$

Exercice 1 (Liban - 31/05/2016) 4 points

Commun à tous les candidats

1. a) Le triangle AIE est rectangle en I. Par le théorème de Pythagore, on en déduit $EI^2 = AE^2 - AI^2$.

D'autre part, $[AC]$ est une diagonale d'un carré de côté 1 et I est son milieu. On a donc $AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Finalement, $EI^2 = 1^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, ce qui donne

$$\boxed{EI = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

I étant le centre du carré $ABCD$, ses coordonnées sont $I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$.

D'autre part, $\overrightarrow{IE} = IE \times \overrightarrow{AK}$, ce qui donne $E\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

Par un argument similaire, on trouve $F\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

b) Ici, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs de base du plan (ABE).

On choisit les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et on vérifie :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n} = \left(\frac{1}{2}\right)\times(-2) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\sqrt{2} = -1+1 = 0$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABE).

c) On connaît déjà un vecteur normal : $\overrightarrow{n}$. On sait qu'il existe un nombre a tel qu'une équation cartésienne de ce plan s'écrit

$$-2y + \sqrt{2}z + a = 0$$

Comme A appartient au plan, on en déduit $-2\times 0 + \sqrt{2}\times 0 + a = 0$, ce qui donne $a = 0$. Finalement, une équation cartésienne du plan est :

$$\boxed{-2y + \sqrt{2}z = 0 \text{ ou } -y\sqrt{2} + z = 0}$$

2. a) On va prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est également normal au plan (FDC) en utilisant deux vecteurs de base de ce plan.

On calcule par exemple, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2}\\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$. On vérifie là encore :

$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \text{ et } \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{n} = \left(\frac{-1}{2}\right)\times(-2) + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\times\sqrt{2} = 1-1 = 0$$

Les plans (ABE) et (FDC) ont un vecteur normal commun, ils sont donc parallèles.

b) (EMN) coupe les plans (ABE) et (FDC) en deux droites parallèles.

On en déduit que la droite correspondant à l'intersection de (EMN) et (FDC) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{NE}$ et passe par M.

On peut donc déterminer une équation paramétrique de cette droite en calculant $\overrightarrow{NE}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\\\frac{-\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}$.

On obtient ainsi l'équation paramétrique de cette intersection.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcll} x & = & \frac{1}{4} & \\ y & = & \frac{3}{4} & +\frac{1}{2}t \\ z & = & \frac{-\sqrt{2}}{4} & +\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}}$$

c) On a appelé Q l'intersection du plan (EMN) avec l'arête $[AF]$ et P l'intersection de ce même plan avec l'arête $[DC]$.

D'après ce qui précède (MP) et (EN) sont parallèles ; ce qui permet de construire le point P.

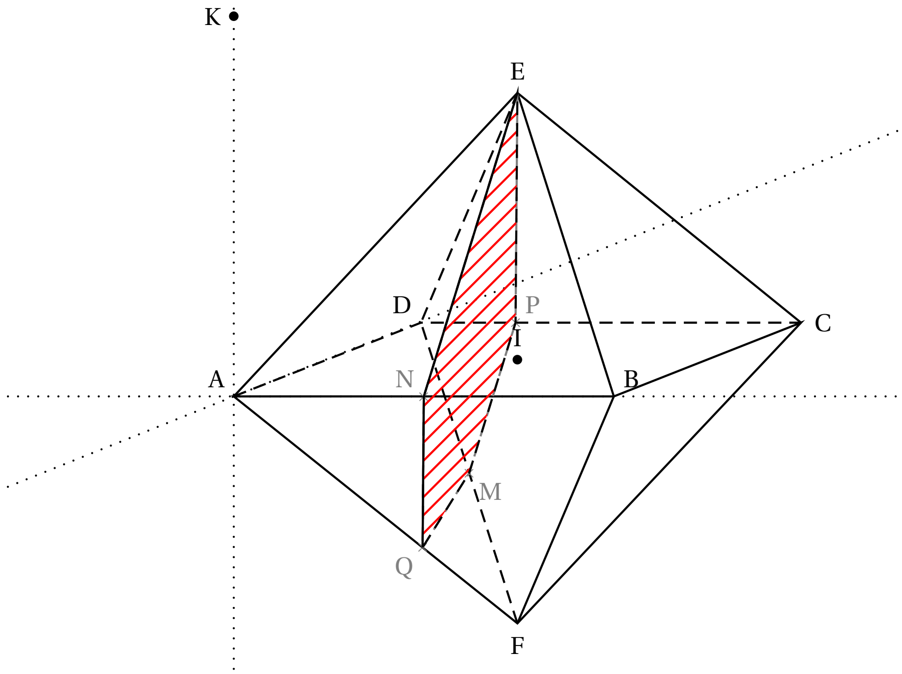
Par des arguments semblables, on peut prouver que les plans (ABF) et (EDC) sont parallèles, ce qui entraîne le parallélisme des droites (NQ) et (EP) et permet ainsi de construire le point Q.

L'intersection est ainsi le pentagone $ENQMP$ dont les côtés $[EN]$ et $[MP]$ sont parallèles ainsi que les côtés $[NQ]$ et $[EP]$.

Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 1



EXERCICE 2 (Métropole-La Réunion - 20/06/2016) **4 POINTS**

Affirmation 1

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Puisque $\frac{-2}{2} \neq \frac{-2}{-2}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles. Les points A,B et C ne sont donc pas alignés :

L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2

Calculons $\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}$:
$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$
$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : on en déduit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) :

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3

Première méthode :
• Montrons tout d'abord que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants :
La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas orthogonaux. Calculons $\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EF} = 0 \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = -2$$

Puisque $\vec{n}.\overrightarrow{EF} \neq 0$, alors

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants

• Puisque le milieu I du segment [BC] appartient manifestement au plan (ABC), il suffit de vérifier si I appartient à la droite (EF) :
Le milieu I du segment $[BC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_C}{2}\ ;\ \frac{y_B + y_C}{2}\ ;\ \frac{z_B + z_C}{2}\right) = (1, 0, 1)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EI}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$

Puisque $\overrightarrow{EI} = -2\overrightarrow{EF}$, les points E, I et F sont alignés :

$$I \in (EF)$$

On a prouvé que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le milieu du segment [BC] :

L'affirmation 3 est vraie.

Seconde méthode :

• Déterminons une représentation paramétrique de la droite (EF) :

La droite (EF) passe par $E(-1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ et est dirigée par $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de la droite (EF) est alors

$$\begin{cases} x=-1-t \\ y=-2-t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=3+t \end{cases}$$

• Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC), noté $\mathscr{P}$: Puisque $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$, ce dernier a une équation de la forme

$$y-z+d=0 \text{ où } d\in\mathbb{R}$$

Puisque $A(1,2,3)$ est un point de $\mathscr{P}$, alors $y_A-z_A+d=0$, soit $d=-y_A+z_A=1$

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est $y-z+1=0$

• Déterminons $(EF)\cap\mathscr{P}$:
Soit M un point de la droite (EF). IL existe alors un nombre réel t tel que

$$\begin{cases} x_M=-1-t \\ y_M=-2-t \\ z_M=3+t \end{cases}$$

M appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $y_M-z_M+1=0$, i.e :

$$-2-t-(3+t)+1=0$$

soit

$$t=-2$$

La droite (EF) et le plan $\mathscr{P}$ sont donc sécants en un point I de coordonnées $(-1-(-2),-2-(-2),3+(-2))=(1,0,1)$
Reste à vérifier que I est le milieu de [BC] :
Le milieu du segment $[BC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2},\frac{z_B+z_C}{2}\right)=(1,0,1)$$

On en déduit que I est le milieu de [BC]

L'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4

Première méthode :

• Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$. N'ayant pas leurs coordonnées proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires :

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles

• Les droites (AB) et (CD) sont donc soit sécantes, soit non coplanaires, selon que le point D appartient ou non au plan (ABC) :

— Une première manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :

  D appartient au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

  Puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=-1+4=3\neq 0$, alors D n'appartient pas au plan (ABC).

— Une seconde manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :
Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, D appartient au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ s'écrit en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, autrement dit si et seulement si il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

L'égalité ci-dessus est équivalente au système :

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta \\ -1 = -2\alpha - 2\beta \\ -4 = -2\alpha - 2\beta \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, D n'est pas un point du plan (ABC). Les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas coplanaires :

L'affirmation 4 est fausse.

Seconde méthode :

• Déterminons des représentations paramétriques des droites (AB) et (CD) :

La droite (AB) passe par A(1 ; 2 ; 3) et est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

La droite (CD) passe par C(-1 ; 0 ; 1) et est dirigée par $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (D) est donc :

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Regardons si ces deux droites sont sécantes. Pour cela on va résoudre le système :

$$\begin{cases} 1+2t = -1+3k \\ 2-2t = k \\ 3-2t = 1-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2-2t \\ 1+2t = -1+3(2-2t) \\ 3-2t = 1-2(2-2t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2-2t \\ 1+2t = -1+6-6t \\ 3-2t = 1-4+4t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2-2t \\ -4 = -8t \\ 6 = 6t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2-2t \\ t = 0,5 \\ t = 1 \end{cases}$$

Ce qui est impossible.

Ce système ne possède donc pas de solution et les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

L'affirmation 4 est fausse.