PRODUIT SCALAIRE

I. Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace 2

I.1 Définition 2

I.2 Règles de calcul 2

I.3 Expression analytique 2

I.4 Vecteurs orthogonaux 2

II. Plans de l'espace 3

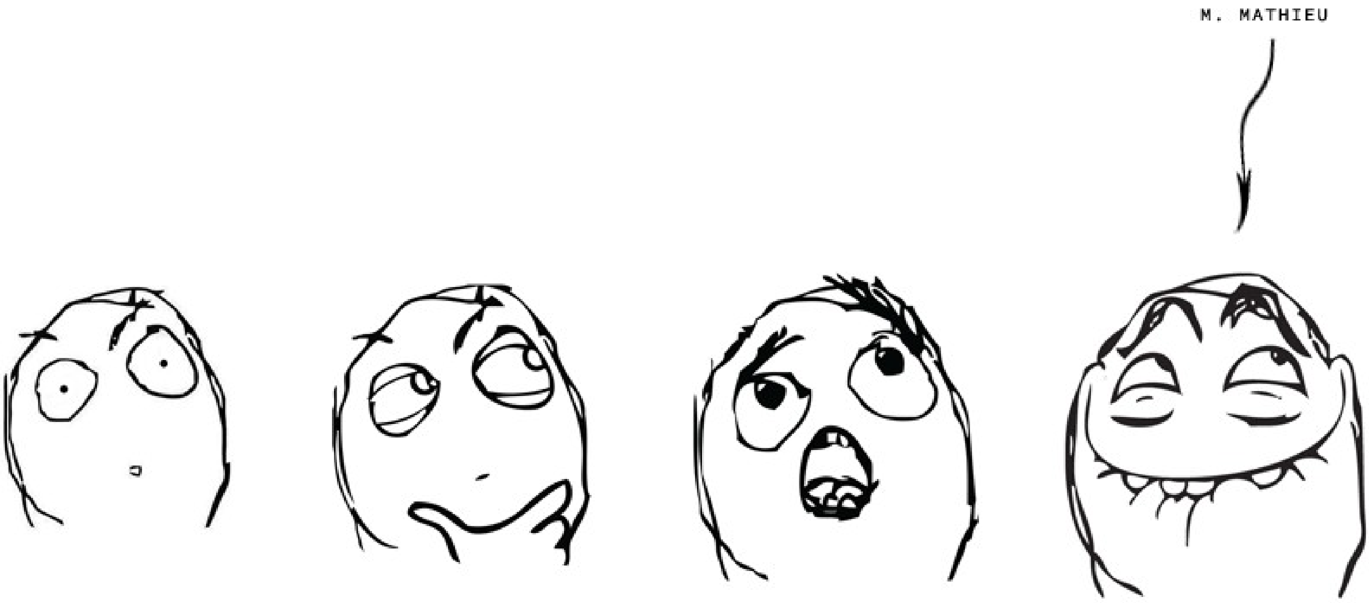
II.1 Vecteur normal à un plan 3

II.2 Équation cartésienne d'un plan 3

II.3 Plans perpendiculaires 4

III. Histoire et applications 5

Un produit scalaire sur un espace vectoriel E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E×E



I. Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

I.1 Définition

Dans l'espace, on se ramène à un produit scalaire dans le plan.

$B = t_{\vec{u}}(A)$ et $C = t_{\vec{v}}(A)$

DÉFINITION. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant les trois points A, B et C.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, calculé dans le plan $\mathscr{P}$.

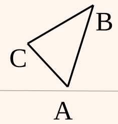
I.2 Règles de calcul

C'est Hamilton en 1853, qui le nomme **produit scalaire** car le résultat du produit de deux vecteurs est un réel (scalaire vient de latin *scala* qui signifie mesure).

Les propriétés suivantes se déduisent des propriétés du produit scalaire dans le plan.

PROPRIÉTÉS. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, pour tout réel k :

- *Commutativité :* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- *Linéarité :* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.
  Sinon : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$



et donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

I.3 Expression analytique

PROPRIÉTÉS. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère **orthonormé** de l'espace.
Soient $\vec{u}\ (x; y; z)$ et $\vec{v}\ (x'; y'; z')$ deux vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$$

Démonstration :

Écrire les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en utilisant la linéarité et en observant que :
$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = \|\vec{i}\|^2 = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

I.4 Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, et quatre points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si (AB) et (CD) sont orthogonales.

Remarque : par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur. $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

PROPRIÉTÉ. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :

Soient trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Dans un plan contenant les points A, B et C, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Alors : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ⇔ (AB) et (AC) sont orthogonales
⇔ $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$
⇔ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

II. Plans de l'espace

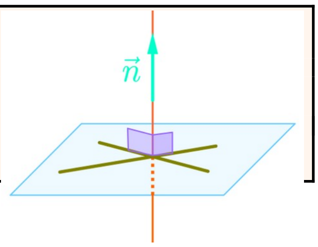
II.1 Vecteur normal à un plan

DÉFINITION.
Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est dit normal à un plan $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans $\mathscr{P}$.

THÉORÈME.

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathscr{P}$

si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs directeurs de ce plan.



Démonstration : [C'est la R.O.C. n°12]

Dans le sens direct, c'est la définition.

Réciproquement, si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$, notés $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan $\mathscr{P}$: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Alors : $\vec{w} \cdot \vec{n} = (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{n} = \alpha\ \vec{u} \cdot \vec{n} + \beta\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

Cela démontre également le théorème vu dans le chapitre « Droites et plans de l'espace » :
« Si une droite D est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan P, alors elle est orthogonale au plan P. »

II.2 Équation cartésienne d'un plan

THÉORÈME. On se place dans un repère **orthonormé** (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).
1) Tout plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal non nul $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ où } d \in \mathbb{R}.$$

Cette équation s'appelle l'***équation cartésienne*** de $\mathscr{P}$.

2) Réciproquement, si $(a;b;c) \neq (0;0;0)$, pour tout réel d, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

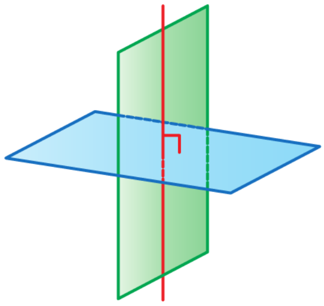
Démonstrations : R.O.C. n°11.

Remarque : ***dans l'espace, une droite n'admet pas d'équation cartésienne*** ! (d'où la rep. param. d'une droite). Par contre si on considère une droite comme l'intersection de deux plans, on peut dire qu'une droite admet un système de deux équations cartésiennes…

II.3 Plans perpendiculaires

On a vu au chapitre « Droites et plans de l'espace » que :

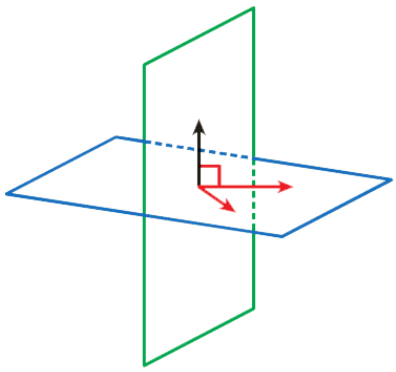
DÉFINITION.
Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un deux contient une droite orthogonale à l'autre.



PROPRIÉTÉ.
Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur de l'un est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

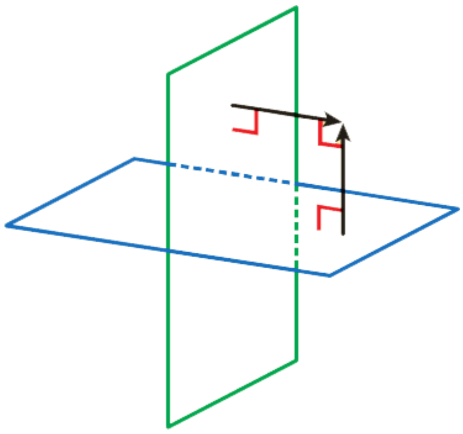
Démonstration :

Un vecteur est normal à un plan s'il est normal à deux vecteurs directeurs de ce plan…



PROPRIÉTÉ.
Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Démonstration : voir page 328



III. Histoire et applications

AU FIL DES MATHS

Histoire du produit scalaire

Au XIX^{e} siècle, le mathématicien allemand Grassmann (1809-1877) étudiant le phénomène des marées, développe le calcul vectoriel et définit le produit scalaire qu'il appelle **produit linéaire** : « Il s'agit du produit algébrique d'un vecteur multiplié par la projection du second vecteur sur le premier ».

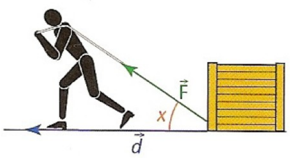
Grassmann note ce nouveau produit a $\frown$ b.

C'est Hamilton en 1853, qui le nomme **produit scalaire** car le résultat du produit de deux vecteurs est un réel (scalaire vient de latin *scala* qui signifie mesure).

L'usine marémotrice installée sur la Rance depuis 1966, transforme l'énergie des marées en électricité.

Le travail d'une force

Le produit scalaire permet en particulier de calculer le travail d'une force lorsqu'on connaît le vecteur déplacement de l'objet et le vecteur représentant la force appliquée.

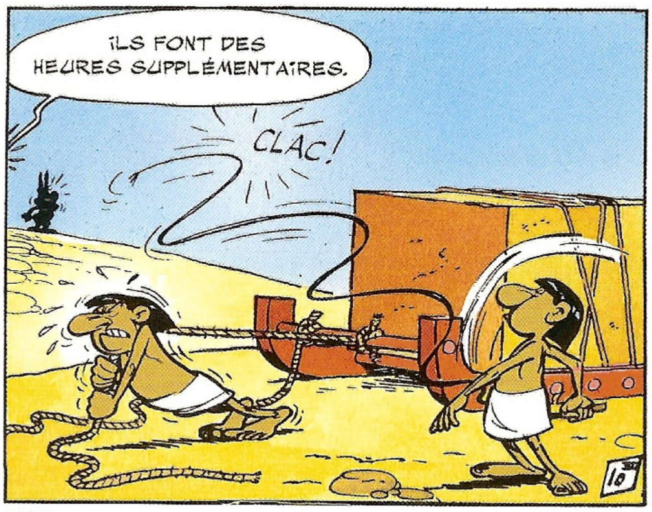


$$W = F \times d \times \cos(x)$$

F : intensité de la force,

d : longueur du déplacement,

x : angle entre les directions de la force et du déplacement.

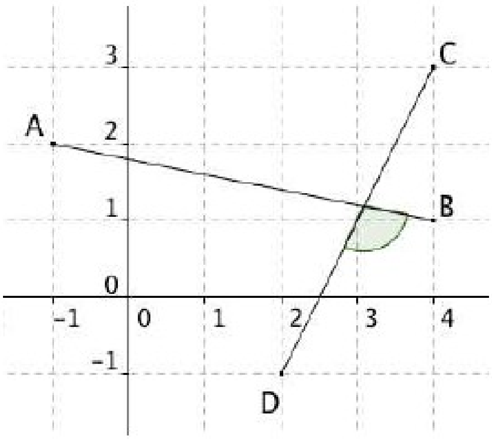


Astérix

Source : un manuel Hyperbole

Une application bien utile du produit scalaire en mathématiques **:**
calculer un angle

Calculer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$.



On a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CD}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$$
$$= \sqrt{5^2+1^2} \times \sqrt{4^2+2^2} \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$$
$$= \sqrt{520} \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$$
$$= 2\sqrt{130} \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$$

On a également : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$, donc :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 5 \times (-2) + (-1) \times (-4) = -6$

On a ainsi : $2\sqrt{130} \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = -6$

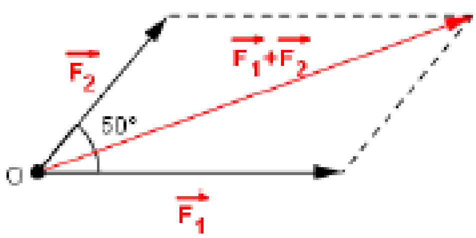
Et donc : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = -\dfrac{6}{2\sqrt{130}} = -\dfrac{3}{\sqrt{130}}$

Et : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \approx 105{,}3°$

Source : http://www.maths-et-tiques.fr/telech/ProduitScal2.pdf

Une autre application du produit scalaire en physique **:**
résultante de deux forces & travail d'une force

On peut utiliser le produit scalaire pour calculer la résultante de deux forces. Soit un point O soumis à deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ qui forme un angle de 50 degré. les intensités des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont respectivement 300 N et 200 N. On a alors la figure ci-dessous :



D'après la première définition, on a :

$$\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}||^2 - F_1^2 - F_2^2\right)$$

D'après la troisième définition, on a :

$$\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} = F_1 \times F_2 \cos 50^\circ$$

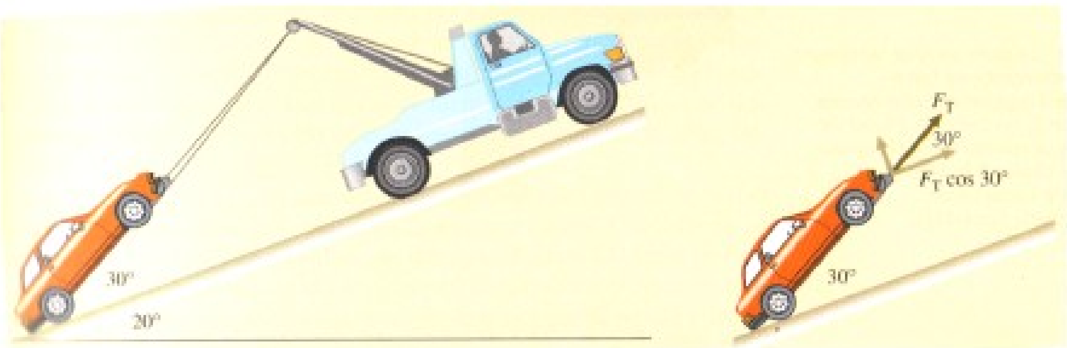
On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}||^2 - F_1^2 - F_2^2\right) &= \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} = F_1 \times F_2 \cos 50^\circ \\
||\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}||^2 &= 2F_1 \times F_2 \cos 50^\circ + F_1^2 + F_2^2 \\
||\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}|| &= \sqrt{2F_1 \times F_2 \cos 50^\circ + F_1^2 + F_2^2} \\
&= \sqrt{2 \times 300 \times 200 \cos 50^\circ + 300^2 + 200^2} \\
&\simeq 455,12 \text{ N}
\end{aligned}$$

On retrouve le produit scalaire en physique pour le travail d'un force. En effet le travail W d'une force $\vec{F}$ est égale au produit scalaire du vecteur force $\vec{F}$ par le vecteur déplacement $\vec{\ell}$.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell}$$

Une dépaneuse remorque une voiture en panne sur une côte de 20 degré. La tension du câble est constante et les deux véhicules ont une accélération constante. En supposant que le câble fait un angle de 30 degré avec le plan de la route et que la tension est de 1600 N, quel est le travail effectué par la dépaneuse sur la voiture si ele la remorque sur une distance de 0,50 km sur cette route en pente.



L'angle de la route n'a pas d'importance ici. On a alors :

$$\begin{aligned}
W &= \overrightarrow{F_T} \cdot \vec{\ell} \\
&= F_T \times \cos 30 \times 500 \\
&= 1600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 500 \\
&= 400\,000\sqrt{3} \\
&\simeq 692,82 \text{ kJ}
\end{aligned}$$