

Coco, dit la larve, et Jade, dite la tête de nœuds, ne supportent plus les punitions de leur professeur de mathématiques ! Il y a deux semaines, Coco a eu à copier 150 fois la phrase suivante : « Monsieur MATHIEU est mon maître vénéré, et je suis un gros fainéant. Cela perturbe les chakras de mon professeur, dont le génie me fascine. Je m'excuse de donner l'impression de m'ennuyer en classe, je suis misérable... ». Il a mis 3 heures pour réaliser ce travail !

Lundi dernier, c'est Jade qui gagnait le jackpot : exactement la même punition, effectuée en 4 heures...

Ce matin, la larve a été sanctionnée pour avoir hurlé joyeusement à l'arrivée du big Boss : « l'alcool c'est comme les profs ça saoule »... La punition sera la même que la précédente ! Désespéré à l'idée de perdre du temps à faire autre chose que ne rien faire, Coco demande à Jade de l'aider, en échange d'un 'tit bisou et de quelques M&M's. Celle-ci accepte et s'exclame, citant BALZAC :

« l'égoïsme est le poison de l'amitié ».

En combien de temps effectueront-ils le travail donné ?

En combien de temps effectueront-ils le travail donné ?

Les solutions en « fond vert » (et encadrées par des étoiles) sont fausses, car elles considèrent que Jade et Coco peuvent écrire une même ligne ensemble ! Or, ceci semble peut probable...

SOLUTION 1

Jade a fait 150 lignes en 4 heures, donc pour faire une ligne il mettra : $\frac{4}{150} \text{ h} = \frac{4}{150} \times 60 \text{ min} = 1,6 \text{ min}$.

De même, pour faire une ligne, Coco mettra : $\frac{3}{150} \text{ h} = 1,2 \text{ min}$.

En 4,8 min, Jade fera donc 3 lignes ($3 \times 1,6 = 4,8$), alors que Coco fera 4 lignes ($4 \times 1,2 = 4,8$).

En 4,8 min, ils feront donc $4 + 3 = 7$ lignes.

On remarque que : $150 = 7 \times 21 + 3$.

Ils feront $7 \times 21 = 147$ lignes en $4,8 \text{ min} \times 21 = 100,8 \text{ min}$. Il leur restera alors 3 lignes à faire : Jade fera 1 ligne en 1,6 min, Coco fera 1 ligne en 1,2 min, et il restera une ligne à faire, que Coco fera puisqu'il aura terminé en premier. Les trois dernières lignes seront donc écrites en : $2 \times 1,2 = 2,4$ minutes.

Conclusion : ils mettront $100,8 + 2,4 = 103,2$ minutes pour faire la punition, soit :

$103,2 \text{ min} = 1 \text{ h} + 43,2 \text{ min} = 1 \text{ h} + 43 \text{ min} + 0,2 \times 60 \text{ s}$ c'est-à-dire **1 h 43 min 12s**.

Remarque : Coco aura écrit $21 \times 4 + 2 = 86$ lignes, et Jade $21 \times 3 + 1 = 64$ lignes.

SOLUTION 2

Jade avait fait sa punition en 4 heures, donc en 1 heure il fera $\frac{1}{4}$ de sa punition.

Coco avait fait sa punition en 3 heures, donc en 1 heure il fera $\frac{1}{3}$ de sa punition.

En travaillant ensemble, ils feront donc en 1 heure : $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$ de la punition.

Pour faire $\frac{1}{12}$ du travail, ils mettront donc 7 fois moins de temps, soit : $\frac{1}{7}$ d'heure.

Donc pour faire toute la punition ($\frac{12}{12}$ du travail), ils mettront : $12 \times \frac{1}{7}$ d'heure, soit :

$$12 \times \frac{1}{7} \times 60 \text{ min} = \frac{720}{7} \text{ min}.$$

Or, $720 = 7 \times 102 + 6$ donc $\frac{720}{7} = 102 + \frac{6}{7}$, ce qui fera $102 \text{ min} + \frac{6}{7} \times 60 \text{ s} = 1 \text{ h} + 42 \text{ min} + \frac{360}{7} \text{ s}$; ils auront donc terminé après environ : **1 h 42 min 52s**.

SOLUTION 3

Jade a travaillé en 4 heures, alors que Coco a travaillé en 3 heures.

La vitesse de Coco est de : 150 lignes / 3 h soit 50 lignes / h .

La vitesse de Jade est de : 150 lignes / 4 h soit 37,5 lignes / h .

Or, $\frac{50}{37,5} = \frac{500}{375} = \frac{4 \times 125}{3 \times 125} = \frac{4}{3}$, donc on peut dire que Coco va $\frac{4}{3}$ fois plus vite que Jade :

$$v_A = \frac{4}{3} \times v_F, \text{ où } v_A \text{ et } v_F \text{ désignent les vitesses respectives de Coco et de Jade.}$$

Pour faire la nouvelle punition, Coco et Jade vont travailler en même temps.

On note alors v_G la vitesse d'écriture dans ce travail commun.

On a alors : $v_G = v_A + v_F$ donc $v_G = \frac{4}{3} \times v_F + v_F = \left(\frac{4}{3} + 1\right) v_F = \frac{7}{3} v_F$, soit :

$$v_G = \frac{7}{3} \times 37,5 \text{ lignes / h} = \frac{7 \times 37,5}{3} \text{ lignes / h} = 87,5 \text{ lignes / h} .$$

Nombre de lignes	Nombre d'heures
87,5	1
150	?

Pour faire 150 lignes, ils mettront donc $\frac{150 \times 1}{87,5} = \frac{150}{87,5} = \frac{1500}{875}$ heures, soit environ 1,7143 heure, ou encore :

1 h + 0,7143 h = 1 h + 0,7143 × 60 min = 1 h + 42,858 min = 1 h + 42 min + 0,858 × 60 s = 1 h 42 min 51,48 s
soit environ **1 h 42 min 52 s**.

SOLUTION 4

Jade a fait 150 lignes en 4 heures, donc pour faire une ligne il mettra : $\frac{4}{150} \text{ h} = \frac{4}{150} \times 60 \text{ min} = 1,6 \text{ min} .$

De même, pour faire une ligne, Coco mettra : $\frac{3}{150} \text{ h} = 1,2 \text{ min} .$

On note : ▪ x le nombre de lignes que Jade fera;

▪ y le nombre de lignes que Coco fera.

On sait donc que : $0 \leq x \leq 150$, $0 \leq y \leq 150$, et $x + y = 150$.

Pour faire la punition, Jade mettra $1,6x$ minutes, alors que Coco mettra $1,2y$ minutes.

On a donc : $1,6x = 1,2y$.

On résout alors le système suivant, noté (S) :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 150 \\ 1,6x = 1,2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 150 - x \\ 1,6x = 1,2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 150 - x \\ 1,6x = 1,2(150 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 150 - x \\ 1,6x = 180 - 1,2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 150 - x \\ 2,8x = 180 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 150 - x \\ x = \frac{180}{2,8} \end{cases}$$

On simplifie : $\frac{180}{2,8} = \frac{1800}{28} = \frac{4 \times 450}{4 \times 7} = \frac{450}{7}$. D'où :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 150 - x \\ x = \frac{450}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 150 - \frac{450}{7} \\ x = \frac{450}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{600}{7} \\ x = \frac{450}{7} \end{cases} .$$

Pour faire la punition, Coco et Jade mettront $1,6x$ min, soit $1,6x = 1,6 \times \frac{450}{7} = \frac{720}{7}$ minutes.

Or, $720 = 7 \times 102 + 6$ donc $\frac{720}{7} = 102 + \frac{6}{7}$, ce qui fera $102 \text{ min} + \frac{6}{7} \times 60 \text{ s} = 1 \text{ h} + 42 \text{ min} + \frac{360}{7} \text{ s}$; ils auront donc terminé après environ : **1 h 42 min 52 s**.

SOLUTION 5

Jade a fait 150 lignes en 4 heures, donc pour faire une ligne il mettra : $\frac{4}{150}h = \frac{4}{150} \times 60 \text{ min} = 1,6 \text{ min}$.

De même, pour faire une ligne, Coco mettra : $\frac{3}{150}h = 1,2 \text{ min}$.

On note : ▪ x le nombre de lignes que Jade fera;

▪ y le nombre de lignes que Coco fera.

On sait donc que : $0 \leq x \leq 150$, $0 \leq y \leq 150$, et $x + y = 150$.

Pour faire la punition, Jade mettra $1,6x$ minutes, alors que Coco mettra $1,2y$ minutes.

On a donc : $1,6x = 1,2y$.

On remarque que :

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 1,6x = 1,2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 150 - x \\ \frac{1,6}{1,2}x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 150 - x \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$$

« $y = 150 - x$ » et « $y = \frac{4}{3}x$ » étant deux équations de fonctions affines, on trace les droites représentatives de ces fonctions dans un repère :

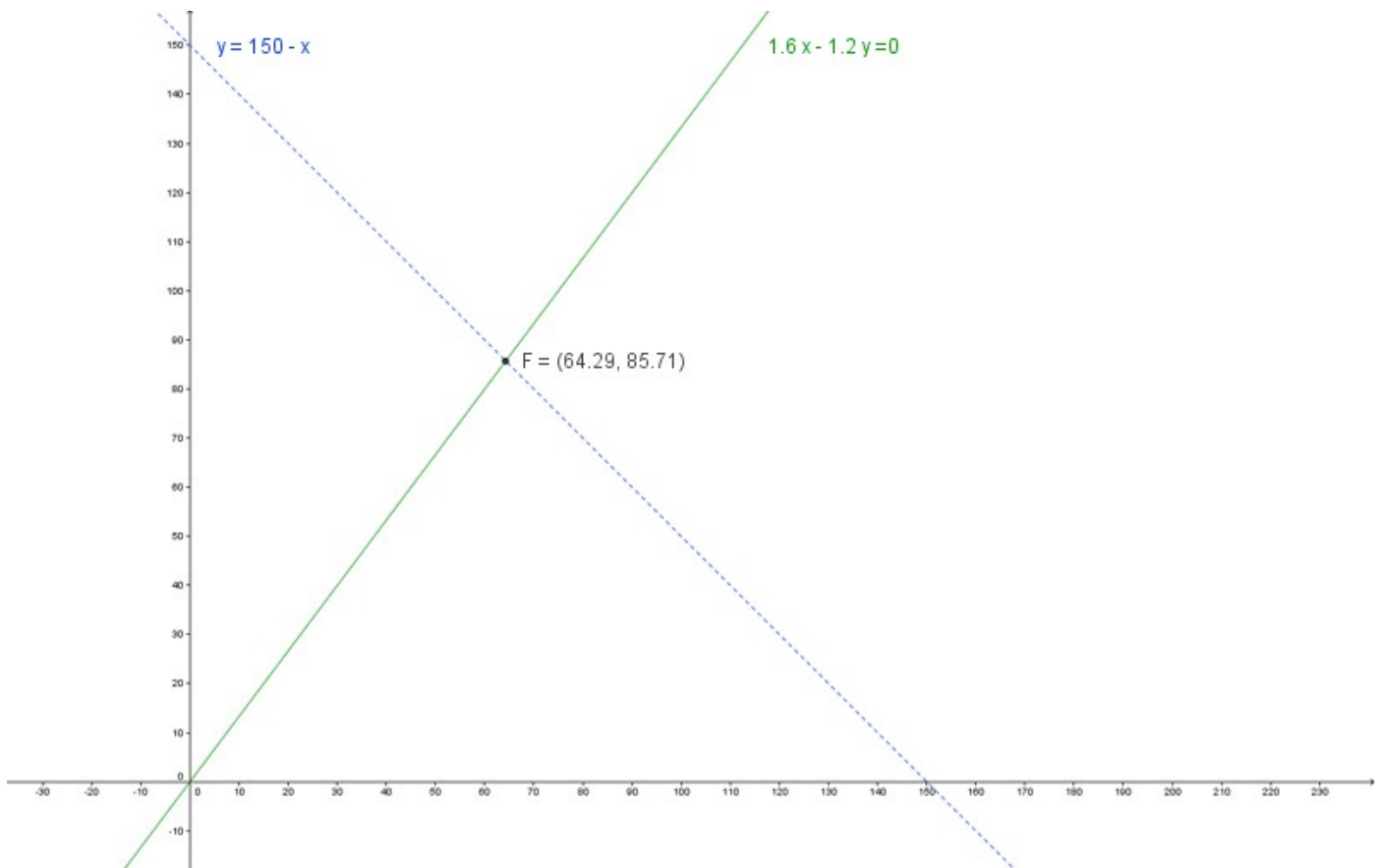


Figure 1

Par lecture graphique, on obtient des valeurs approchées des coordonnées du point d'intersection des deux droites : $(64,29; 85,71)$. Cela signifie que Jade fera 64,29 lignes, et Coco 85,71 lignes.

Ils mettront donc environ : $64,29 \times 1,6 = 102,864$ minutes, soit $1h + 42 \text{ min} + 0,864 \times 60 \text{ s}$, c'est-à-dire environ :

1 h 42 min 52 s.

SOLUTION 6

Jade a fait 150 lignes en 4 heures, donc pour faire une ligne il mettra : $\frac{4}{150} \text{ h} = \frac{4}{150} \times 60 \text{ min} = 1,6 \text{ min}$.

De même, pour faire une ligne, Coco mettra : $\frac{3}{150} \text{ h} = 1,2 \text{ min}$.

On note x le nombre de minutes écoulées depuis le moment où Coco et Jade auront commencé la punition. En fonction de x (du temps écoulé), on souhaite exprimer le nombre de lignes terminées par les amis. On définit donc une fonction g , qui à x associe le nombre de lignes terminées.

Calculons les images de 1, 2 et 3 par la fonction g :

- $g(1)=0$ puisqu'en 1 minute, aucun des deux n'aura terminé sa première ligne
- $g(2)=2$ puisque :
 $2 \div 1,2 \approx 1,67$ et $2 \div 1,6 = 1,25$
donc en 2 minutes, Coco et Jade auront terminé leur 1^{ère} ligne (et commencé leur 2^{ème})
- $g(3)=2$ puisque :
 $3 \div 1,2 = 2,5$ et $3 \div 1,6 = 1,875$
donc en 3 minutes, Coco aura terminé 2 lignes (et commencé une 3^{ème}), Jade en aura terminé une seule (et commencé une 2^{ème}).

On comprend alors que, pour savoir combien de lignes Coco aura terminé en x minutes, on doit calculer $x \div 1,2$, et trouver **la partie entière de** ce nombre : *Geogebra* calcule ce nombre en écrivant $\text{floor}(x/1,2)$... On doit faire de même pour Jade : $\text{floor}(x/1,6)$.

Finalement, on obtient l'expression de la fonction g : $\boxed{g(x) = \text{floor}(x \div 1,2) + \text{floor}(x \div 1,6)}$.

Geogebra nous permet d'obtenir une représentation graphique de cette fonction dans un repère :



Figure 2

On cherche alors l'abscisse du point d'intersection de cette courbe et de la droite d'équation $y=150$, puisqu'on cherche à connaître le nombre de minutes écoulées lorsque les deux amis auront terminés 150 lignes. En « zoomant » on obtient ceci :

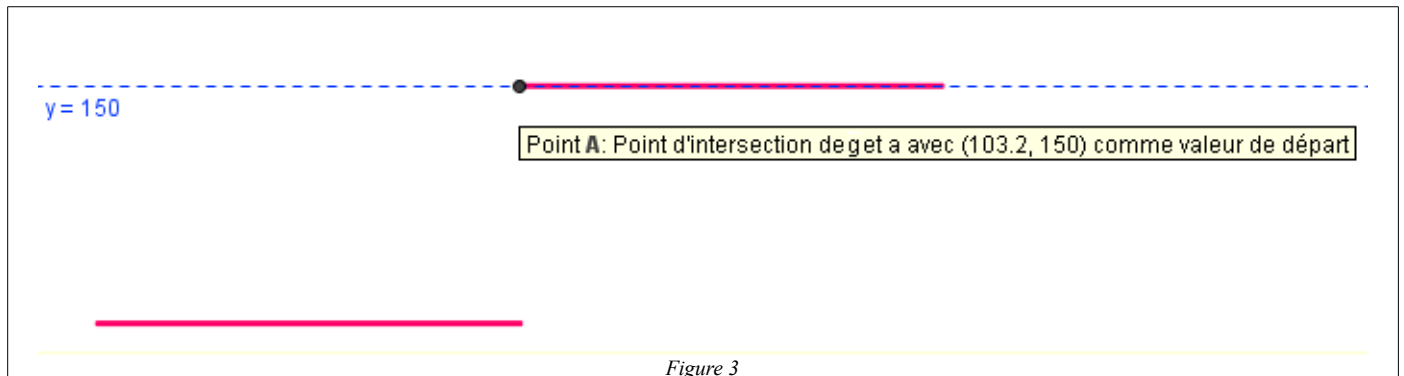


Figure 3

Coco et Jade auront donc écrit 150 lignes après 103,2 minutes.

$$103,2 \text{ min} = 1 \text{ h} + 43,2 \text{ min} = 1 \text{ h} + 43 \text{ min} + 0,2 \times 60 \text{ s} = 1 \text{ h} 43 \text{ min} 12 \text{ s} .$$

Conclusion : ils auront terminé la punition après **1 h 43 min 12 s**.

SOLUTION 7

Jade a fait 150 lignes en 4 heures, donc pour faire une ligne il mettra : $\frac{4}{150} \text{ h} = \frac{4}{150} \times 60 \text{ min} = 1,6 \text{ min} .$

De même, pour faire une ligne, Coco mettra : $\frac{3}{150} \text{ h} = 1,2 \text{ min} .$

On note :
 ▪ x le nombre de lignes que Jade fera;
 ▪ y le nombre de lignes que Coco fera.

On sait donc que : $0 \leq x \leq 150$, $0 \leq y \leq 150$, et **$x + y = 150$** .

Lorsque la punition sera terminée, si on suppose que Jade a écrit x lignes, alors c'est que Coco en a écrit $y = 150 - x$. Jade aura mis $1,6x$ minutes, alors que Coco aura mis $1,2y$ minutes. Pour savoir exactement le nombre de minutes écoulées lorsque la punition sera terminée, on doit donc connaître le maximum entre le temps mis par Jade et le temps mis par Coco : $\max(1,6x; 1,2y)$, et cela pour tous les nombres x et y qui vérifient les conditions ($0 \leq x \leq 150$, $0 \leq y \leq 150$, et $x + y = 150$).

On va alors utiliser un tableur (*Excel* par exemple) pour conjecturer les valeurs de x et y qui répondent au problème (voir page suivante).

On peut alors demander au tableur de représenter graphiquement les points de coordonnées $(x; \max(1,6x; 1,2y))$... (voir figure 4), mais cela n'est pas indispensable.

On remarque assez rapidement la solution : **$x=64$** , **$y=86$** et **$\max(1,6x; 1,2y)=103,2$** , ce qui signifie que lorsque la punition sera terminée, Jade aura écrit 64 lignes alors que Coco en aura écrit 86, et ils auront mis 103,2 minutes.

$$103,2 \text{ min} = 1 \text{ h} + 43,2 \text{ min} = 1 \text{ h} + 43 \text{ min} + 0,2 \times 60 \text{ s} = 1 \text{ h} 43 \text{ min} 12 \text{ s} .$$

Conclusion : ils auront mis **1 h 43 min 12 s**.

Remarque : le tableur nous a permis de calculer ce qu'on note $\min(\max_{x \in [0; 150], y \in [0; 150], x+y=150}(1,6x; 1,2y))$.

x	y = 150 - x	max(1,6x ; 1,2y)	↗ ou ↘
1	149	178,8	
2	148	177,6	↘
3	147	176,4	↘
4	146	175,2	↘
5	145	174	↘
6	144	172,8	↘
7	143	171,6	↘
8	142	170,4	↘
9	141	169,2	↘
10	140	168	↘
11	139	166,8	↘
12	138	165,6	↘
13	137	164,4	↘
14	136	163,2	↘
15	135	162	↘
16	134	160,8	↘
17	133	159,6	↘
18	132	158,4	↘
19	131	157,2	↘
20	130	156	↘
21	129	154,8	↘
22	128	153,6	↘
23	127	152,4	↘
24	126	151,2	↘
25	125	150	↘
26	124	148,8	↘
27	123	147,6	↘
28	122	146,4	↘
29	121	145,2	↘
30	120	144	↘
31	119	142,8	↘
32	118	141,6	↘
33	117	140,4	↘
34	116	139,2	↘
35	115	138	↘
36	114	136,8	↘
37	113	135,6	↘
38	112	134,4	↘
39	111	133,2	↘
40	110	132	↘
41	109	130,8	↘
42	108	129,6	↘
43	107	128,4	↘
44	106	127,2	↘
45	105	126	↘
46	104	124,8	↘
47	103	123,6	↘
48	102	122,4	↘
49	101	121,2	↘
50	100	120	↘
51	99	118,8	↘
52	98	117,6	↘
53	97	116,4	↘
54	96	115,2	↘
55	95	114	↘
56	94	112,8	↘
57	93	111,6	↘
58	92	110,4	↘
59	91	109,2	↘
60	90	108	↘
61	89	106,8	↘
62	88	105,6	↘
63	87	104,4	↘
64	86	103,2	↘
65	85	104	↗
66	84	105,6	↗
67	83	107,2	↗
68	82	108,8	↗
69	81	110,4	↗
70	80	112	↗
71	79	113,6	↗
72	78	115,2	↗
73	77	116,8	↗
74	76	118,4	↗

75	75	120	↗
76	74	121,6	↗
77	73	123,2	↗
78	72	124,8	↗
79	71	126,4	↗
80	70	128	↗
81	69	129,6	↗
82	68	131,2	↗
83	67	132,8	↗
84	66	134,4	↗
85	65	136	↗
86	64	137,6	↗
87	63	139,2	↗
88	62	140,8	↗
89	61	142,4	↗
90	60	144	↗
91	59	145,6	↗
92	58	147,2	↗
93	57	148,8	↗
94	56	150,4	↗
95	55	152	↗
96	54	153,6	↗
97	53	155,2	↗
98	52	156,8	↗
99	51	158,4	↗
100	50	160	↗
101	49	161,6	↗
102	48	163,2	↗
103	47	164,8	↗
104	46	166,4	↗
105	45	168	↗
106	44	169,6	↗
107	43	171,2	↗
108	42	172,8	↗
109	41	174,4	↗
110	40	176	↗
111	39	177,6	↗
112	38	179,2	↗
113	37	180,8	↗
114	36	182,4	↗
115	35	184	↗
116	34	185,6	↗
117	33	187,2	↗
118	32	188,8	↗
119	31	190,4	↗
120	30	192	↗
121	29	193,6	↗
122	28	195,2	↗
123	27	196,8	↗
124	26	198,4	↗
125	25	200	↗
126	24	201,6	↗
127	23	203,2	↗
128	22	204,8	↗
129	21	206,4	↗
130	20	208	↗
131	19	209,6	↗
132	18	211,2	↗
133	17	212,8	↗
134	16	214,4	↗
135	15	216	↗
136	14	217,6	↗
137	13	219,2	↗
138	12	220,8	↗
139	11	222,4	↗
140	10	224	↗
141	9	225,6	↗
142	8	227,2	↗
143	7	228,8	↗
144	6	230,4	↗
145	5	232	↗
146	4	233,6	↗
147	3	235,2	↗
148	2	236,8	↗
149	1	238,4	↗
150	0	240	↗

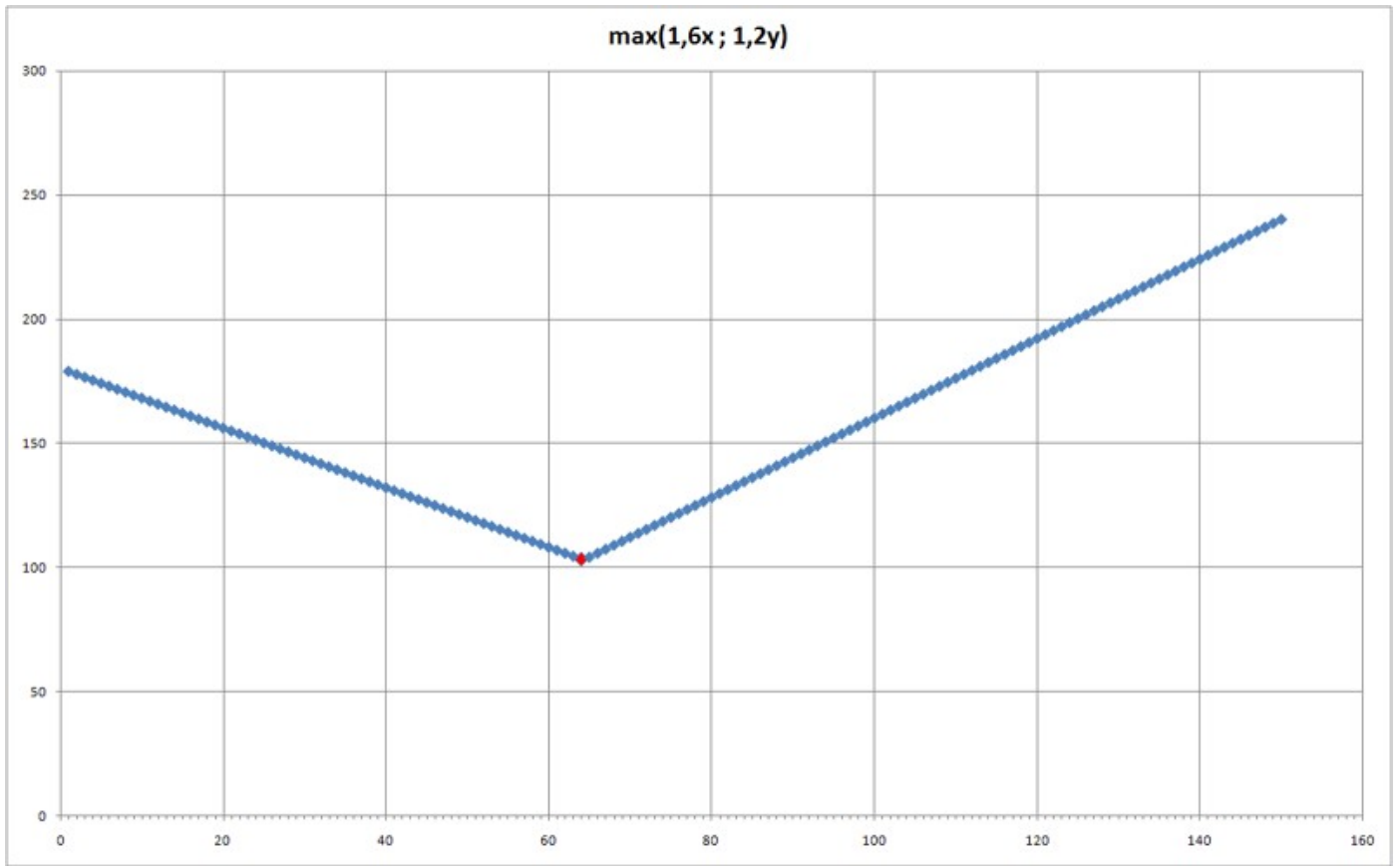


Figure 4