Dans une nouvelle forme de sport, on ne peut marquer que deux scores :

- 5 points, pour un but au pied ;
- 9 points, pour un but à la main.

Certains totaux sont ainsi impossibles à atteindre par une équipe comme 3, 8 ou 12 points.

Montrez qu'à partir d'un certain nombre, tous les totaux sont possibles.
Quel est le plus grand score impossible à atteindre ?

Source : « Jeux mathématiques du "Monde" », de E. Busser et G. Cohen, éditions POLE

SOLUTION

Tout d'abord, voici une propriété dont nous allons avoir besoin pour résoudre ce problème.

Propriété : L'ensemble des entiers naturels est l'ensemble des nombres de la forme :
$5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$ (où k est un entier naturel)

DÉMONSTRATION :
• Un nombre d'une de la forme $5k+r$ où $0<r\leqslant 4$ et $k \in \mathbb{N}$ est nécessairement un entier naturel (comme somme d'un produit d'entiers naturels et d'un entier naturel).
• Soit N un entier naturel. On effectue la division euclidienne de N par 5 : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que N = 5k + r où k est un entier naturel et $0<r\leqslant 4$

• <u>Si aucun but à 9 points est marqué</u> : **le score peut atteindre tous les nombres de la forme $5k$ ($k \in \mathbb{N}$)**.

• <u>Si un seul but à 9 points est marqué</u> : le score peut atteindre les nombres de la forme $9+5k$ où $k \in \mathbb{N}$.
Or : $9+5k=5+4+5k=5(k+1)+4$
donc le score est de la forme $5K+4$ où $K \in \mathbb{N}$ et $K\geqslant 1$
donc **on peut obtenir tous les nombres de la forme $5k+4$ ($k \in \mathbb{N}$), sauf le nombre 4**.

• <u>Si exactement deux buts à 9 points sont marqués</u> : le score peut atteindre les nombres de la forme $2\times 9+5k$ où $k \in \mathbb{N}$. Or : $2\times 9+5k=5\times 3+3+5k=5(k+3)+3$
donc le score est de la forme $5K+3$ où $K \in \mathbb{N}$ et $K\geqslant 3$
donc **on peut obtenir tous les nombres de la forme $5k+3$ ($k \in \mathbb{N}$), sauf les nombres 3, 8 et 13**.

• <u>Si exactement trois buts à 9 points sont marqués</u> : le score peut atteindre les nombres de la forme $3\times 9+5k$ où $k \in \mathbb{N}$. Or : $3\times 9+5k=5\times 5+2+5k=5(k+5)+2$
donc le score est de la forme $5K+2$ où $K \in \mathbb{N}$ et $K\geqslant 5$
donc **on peut obtenir tous les nombres de la forme $5k+2$ ($k \in \mathbb{N}$), sauf les nombres 2, 7, 12, 17, et 22**.

• <u>Si exactement quatre buts à 9 points sont marqués</u> : le score peut atteindre les nombres de la forme $4\times 9+5k$ où $k \in \mathbb{N}$. Or : $4\times 9+5k=5\times 7+1+5k=5(k+7)+1$
donc le score est de la forme $5K+1$ où $K \in \mathbb{N}$ et $K\geqslant 7$
donc **on peut obtenir tous les nombres de la forme $5k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), sauf les nombres 1, 6, 11, 16, 21, 26 et 31**.

• Enfin, <u>si au moins cinq buts à 9 points sont marqués</u> : le score dépassera les $5\times 9=45$ points, et **donc les nombres que l'on ne pouvait pas atteindre dans les cas précédents ne pourront être obtenus**, puisque le plus grand de ces nombres est 31.

<u>Conclusion</u> : d'après ce raisonnement et la propriété précédente, tous les nombres sont ainsi obtenus, sauf quelques uns dont le plus grand est 31.