Trois trous sont disposés dans un mur, de façon que les distances de deux quelconques d'entre eux ne soient jamais égales. Dans chacun, une araignée veille.
Au matin, chacune des araignées sort de son trou, se dirige vers le trou le plus proche et y reste un bon moment dans l'espoir d'y trouver de la nourriture.

Est-il possible qu'elles se retrouvent à nouveau toutes les trois dans trois trous différents ?

*Source** : « Jeux mathématiques du "Monde" », de E. Busser et G. Cohen, éditions POLE
**énoncé légèrement modifié*

SOLUTION 1

On note T_1 , T_2 et T_3 les trois trous, et A_1 , A_2 et A_3 les araignées correspondantes.
D'après l'énoncé, une des trois distances T_1T_2 , T_1T_3 et T_2T_3 est strictement inférieure aux autres.
Notons a cette distance, par exemple T_1T_2 .
Alors l'araignée A_1 ira dans T_2 ; l'araignée A_2 ira dans T_1 .
L'araignée A_3 ira dans T_1 ou T_2 .

Conclusion : le trou T_1 ou T_2 contiendra deux araignées.
Les trois araignées ne peuvent pas se retrouver dans trois trous différents.

SOLUTION 2

On trie par ordre décroissant les distances parcourues par les araignées : $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$.
On appelle A_i l'araignée qui a parcouru la distance a_i et on note T_i le trou dont est partie l'araignée A_i .
Par abus de notation, on notera (par exemple) T_1T_3 la distance qui sépare les trous T_1 et T_3 .

• 1er cas : $\mathbf{a_1 > a_2}$
Alors **le trou $\mathbf{T_1}$ restera vide**.

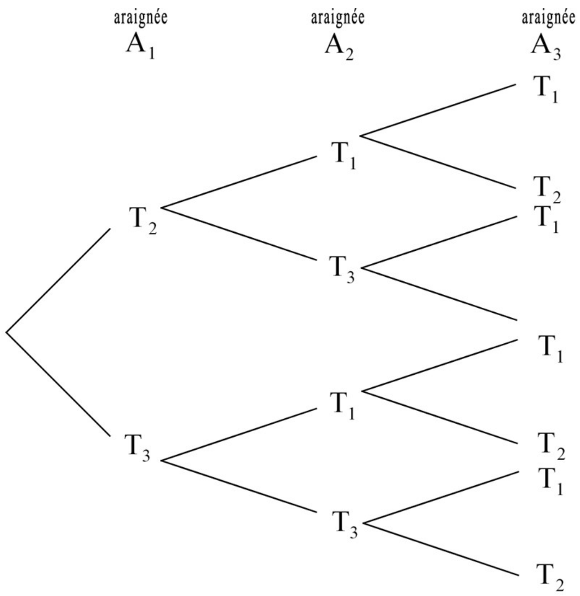
PREUVE : si une araignée parvient en T_1 , une des distances a_i aura été parcourue par l'araignée A_i (où $i \neq 1$ car A_1 ne peut pas parvenir en T_1) : $a_i = T_1T_i$.
Or, on a $a_i \leqslant a_2$ (et $a_2 < a_1$ par hypothèse), d'où $a_i < a_1$ ou encore : $T_1T_i < a_1$.
Cela est absurde puisque la distance a_1 est la plus petite des distances T_1T_k où $k \neq 1$ … d'où le résultat.

• 2ème cas : $\mathbf{a_1 = a_2}$
Alors A_1 et A_2 échangent nécessairement leurs places (car l'énoncé indique des distances entre les trous deux à deux distinctes...). **Le trou $\mathbf{T_3}$ restera donc vide** lorsque l'araignée A_3 le quittera.

Conclusion* : *les trois araignées ne peuvent pas se retrouver dans trois trous différents.

SOLUTION 3

On peut dénombrer les différentes façons pour les araignées de se déplacer :



On peut remarquer que seulement deux chemins de l'arbre représentent une situation où les trois araignées se retrouvent dans trois trous différents. Il suffit alors de traiter ces deux cas en montrant qu'ils sont impossibles.

Par exemple, pour la situation $(T_2;T_3;T_1)$:

- A_1 va dans T_2 donc $T_1T_2 < T_1T_3$;
- A_2 va dans T_3 donc $T_2T_3 < T_1T_2$;
- A_3 va dans T_1 donc $T_1T_3 < T_2T_3$.

On a donc : $T_1T_3 < T_2T_3 < T_1T_2 < T_1T_3$, ce qui est absurde...