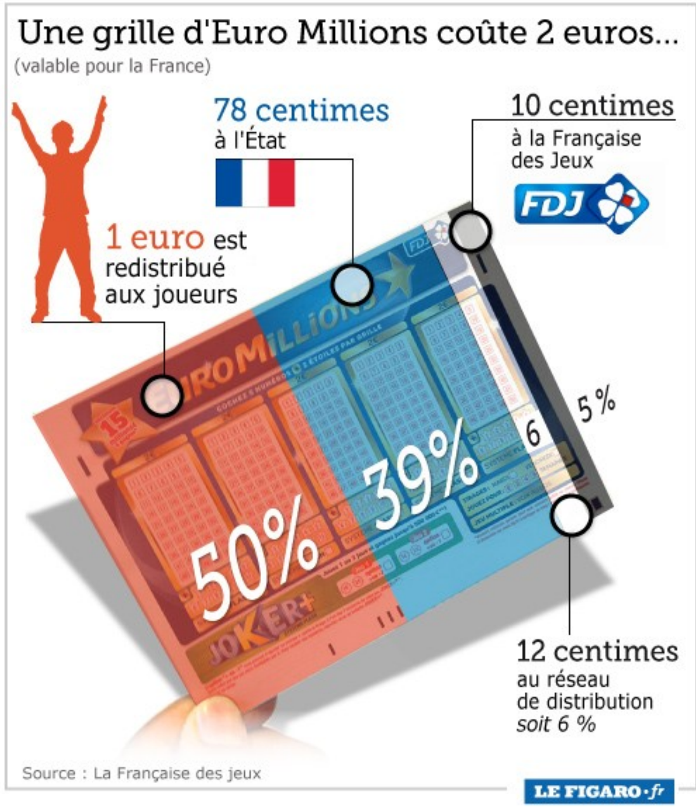
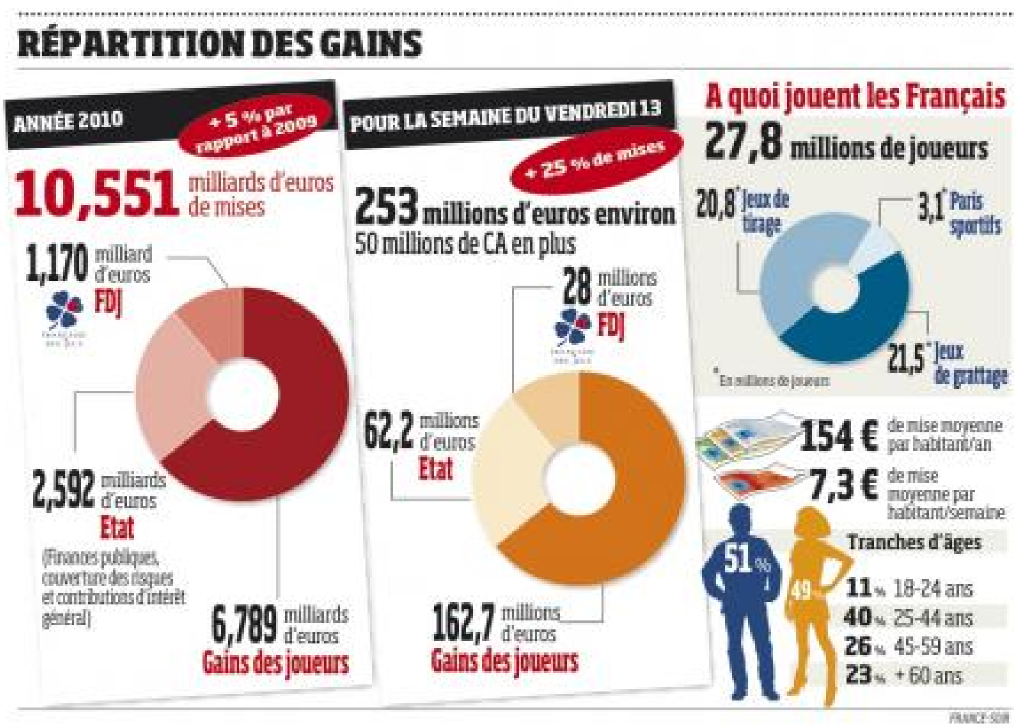
DES STATISTIQUES AUX PROBABILITÉS

L'improbable a toutes les chances de se produire.
[Aristote]

Le hasard est le plus grand romancier du monde. Pour être fécond, il n'y a qu'à l'étudier.
[Honoré de Balzac]





I. Probabilité sur un ensemble fini

Définition : • Une expérience est dite ***aléatoire*** lorsqu'elle a plusieurs issues possibles, et que l'on ne peut pas prévoir laquelle sera réalisée.
• L'***univers*** est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience aléatoire. On le notera souvent Ω.

Exemple : une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire une boule au hasard, et on note le numéro correspondant. Il y a 8 issues possibles, l'univers est : Ω = ...

Dans la suite, on considère une expérience aléatoire dont l'univers est noté $\Omega = \{ x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ldots ; \ x_n \}$.

Définition : définir une ***loi de probabilité*** sur Ω, c'est associer à chaque issue x_i un nombre réel p_i tel que .... , de telle manière que ....
Chaque nombre p_i est appelé ***probabilité de l'issue*** x_i .

Exemple : si les boules numérotées de l'exemple précédent sont indiscernables au toucher, on considère que chaque numéro a autant de « chances » qu'une autre d'être tiré. On a alors : $p_1 = p_2 = \ldots = p_8 =$ ....

Définition : lorsqu'on associe à chacune des *n* issues d'une expérience aléatoire la même probabilité p égale à $\frac{1}{n}$, on parle de ***loi équirépartie*** ou ....

Propriété : ***Loi des grands nombres*** *(énoncé vulgarisé)*
Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur *n* répétitions de l'expérience se rapprochent de la loi de probabilité quand *n* devient grand.

II. Probabilité d'un événement

On considère une expérience aléatoire, modélisée avec une loi de probabilité définie sur l'univers $\Omega = \{ x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ldots ; \ x_n \}$.

Définitions : • Un ***événement*** est une partie de l'univers Ω.
• Un ***événement élémentaire*** est un événement qui contient une seule issue.
• L'***événement certain*** contient toutes les issues, c'est l'univers Ω.
• L'***événement impossible*** ne contient aucune issue, et est noté ∅ (« vide »).

Exemple : on lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.
L'événement « obtenir 7 » est ....
L'événement « obtenir 2 » est ....
L'événement « obtenir 2 ou 5 » est ....
L'événement « obtenir un entier naturel non nul inférieur ou égal à 6 » est ....

Définition : la ***probabilité d'un événement A*** est la somme des probabilités des issues qui le réalisent. On la note $p(A)$.

Exemple : on lance un dé <u>pipé</u> à six faces numérotées de 1 à 6. On note le numéro obtenu, et on considère la loi de probabilité suivante :

Numéro de la face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

L'événement A : « obtenir un nombre impair » est réalisé par les issues 1, 3 et 5, donc :

$p(A)=$ ....

Propriétés :
- $p(\emptyset)=\ldots$
- $p(\Omega)=\ldots$
- Pour tout événement A : $\ldots\leqslant p(A)\leqslant\ldots$.

DÉMONSTRATION : • $p(\emptyset)=\ldots$ car l'événement impossible ne contient aucune issue.

• $\Omega=\{x_1\ ;\ x_2\ ;\ \ldots\ ;\ x_n\}$ donc $p(\Omega)=p(x_1)+p(x_2)+\ldots+p(x_n)=1$

• On note A = $\{a_1\ ;\ a_2\ ;\ \ldots\ ;\ a_m\}$. Alors $p(A)=p(a_1)+p(a_2)+\ldots+p(a_m)$ est une somme de nombres positifs ou nuls, donc $p(A)\geqslant 0$.

De plus, $p(a_1)+p(a_2)+\ldots+p(a_m)\leqslant p(x_1)+p(x_2)+\ldots+p(x_n)$ car A est inclus dans Ω, d'où $p(A)\leqslant 1$.

Propriété : Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A)=\frac{nombre\ d'issues\ dans\ \ldots}{nombre\ d'issues\ dans\ \ldots}\ .$$

DÉMONSTRATION : la probabilité de chaque issue de A est $\frac{1}{n}$ où n est le nombre d'issues de l'expérience.

Si A contient exactement m issues, alors : $p(A)=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m\ fois}=\frac{m}{n}$.

Exemples : exercices résolus page 173 « Utiliser l'hypothèse d'équiprobabilité » & « Déterminer des probabilités en utilisant un arbre ».

III. Calculs de probabilités

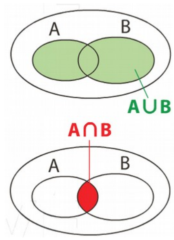
Définitions : soient A et B deux événements.

• La ***réunion de A et de B*** est l'événement, noté .... , constitué des issues qui sont dans A <u>ou</u> dans B.

• L'***intersection de A et de B*** est l'événement, noté .... , constitué des issues qui sont dans A <u>et</u> dans B.

• Deux événements sont ***incompatibles*** lorsqu'ils n'ont aucune issue en commun : $A\cap B=$ ....

• L'événement $\overline{A}$, ***contraire de l'événement A***, est constitué de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.



Exemple : exercice résolu page 175 (Décrire une situation en utilisant l'intersection et la réunion)

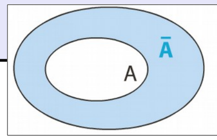
Propriétés :

- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors on a $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
- Pour tous les événements A et B : $\boldsymbol{p(A\cup B)=}$ ....

DÉMONSTRATIONS : page 176

Schéma pour retenir les propriétés :

Propriété : pour tout événement A : $p(A)+p(\overline{A})=1$.



DÉMONSTRATION : $A\cup\overline{A}=\ldots$ et $A\cap\overline{A}=\ldots$ (A et $\overline{\text{A}}$ sont incompatibles) donc
$p(A)+p(\overline{A})=p(\ldots)=\ldots$.

Exemple : exercice résolu 5 page 181 « Utiliser les propriétés des probabilités »