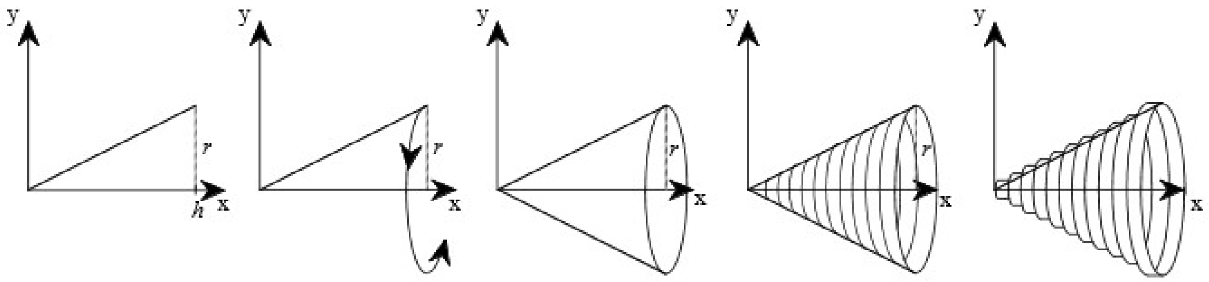
INTÉGRATION

Le calcul de volume : un sujet des mathématiques qui intéresse depuis toujours ?

Il y a des millénaires que les calculs d'aires et de volumes sont au centre des préoccupations quotidiennes. Que ce soit en Mésopotamie, en Égypte ou en Asie, on recense très tôt des traces de techniques de calcul pour déterminer le volume de divers objets de la vie courante. En Mésopotamie, dans une tablette de l'époque paléo-babylonienne (entre 2000 et 1595 av. J.-C.), on trouve l'évaluation du volume d'un canal ; en Égypte, dans le papyrus de Rhind (1650 av. J.-C.), des volumes de silos à grain sont calculés. Au sein d'ouvrages de mathématiques, on rencontre souvent des techniques et instruments développés pour les besoins populaires : ceux des marchands, des agriculteurs, des constructeurs.



Calcul du volume des tonneaux

Le calcul du volume du tonneau intéresse les mathématiciens depuis des siècles : il est déjà abordé par Archimède (287 av. J.-C. - 212 av. J.-C.). Johannes Kepler (1571-1630) publie, en 1615, un traité intitulé *Nova stereometria doliorum vinariorum* (*Nouvelle géométrie des solides pour les tonneaux de vins*). Il y développe une théorie précise pour calculer le volume d'un tonneau en fonction de sa forme. D'après ce qu'il écrit, il aurait élaboré cet ouvrage suite à son second mariage : la méthode de mesure des tonneaux utilisée par son vendeur de vin ne prenait pas en compte les différentes formes de ces tonneaux et, d'après Kepler, elle manquait sérieusement de précision. En tant que mathématicien, il fut révolté et écrivit ce livre deux ans plus tard !
Grâce aux travaux sur le calcul différentiel et intégral réalisés dans les siècles qui suivirent, notamment par Gottfried W. Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1643-1727), Bernard Riemann (1826-1866) et Henri-Léon Lebesgue (1875-1941) nous pouvons aujourd'hui déterminer une formule exacte du volume d'un tonneau selon sa forme !


STEREOMETRIA DO-

De virga cubicâ eiusq; certitudine.

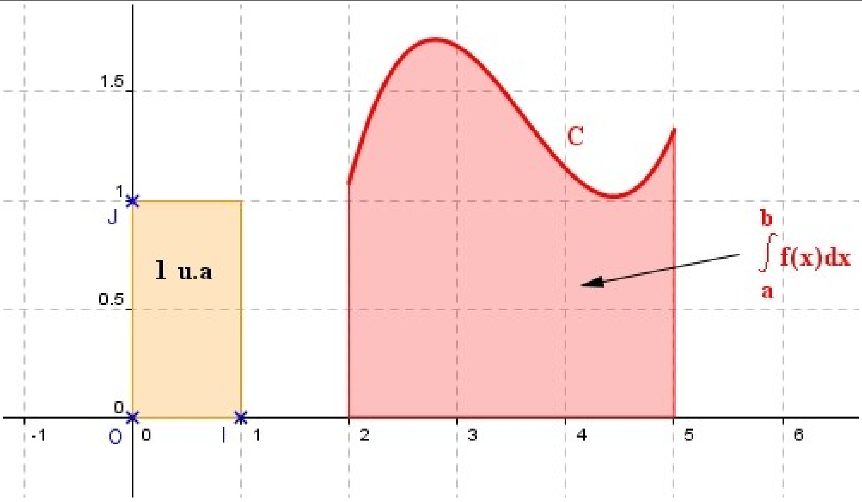
THEOREMA XXVI.

In doliis, quæ sunt inter se figuræ similis; proportio capacitatum est tripla ad proportionem illarum longitudinum, quæ sunt ab orificio summo, ad imum calcem alterutrius Orbis lignei.

I. Intégrale d'une fonction continue positive

DÉFINITION.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a \leqslant b$).
On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On appelle ***intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$***, et on note $\int_a^b f(x)dx$, le nombre réel représentant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan D délimitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Remarques :

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)dx$ ».
- a et b sont les ***bornes d'intégration***.
- x est la ***variable d'intégration***, elle peut être remplacée par une autre lettre :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(v)dv = \text{etc.}$$

Mais cette notation est indispensable pour définir l'expression de la fonction que l'on intègre, par exemple : $\int_a^b k e^{-x} dx$. « dx » indique alors clairement quelle est la variable.

- $\int_a^a f(x)dx = \ldots$

Exemples :

- Soit k un réel positif. Alors : $\int_a^b k\,dx = \ldots$

- Le plan étant muni d'un repère orthonormé, après avoir reconnu la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ sur $[0;1]$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

La calculatrice donne quelle valeur approchée ?

II. Intégrale et primitive d'une fonction continue positive

ROC

PROPRIÉTÉ. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$.

La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et $F'=f$.

On dit que F *est une primitive de* f *sur* $[a;b]$.

Démonstration : R.O.C. dans le cas où f est croissante sur $[a;b]$. Admis dans le cas général.

Soit f une fonction croissante, continue et positive sur $[a;b]$.

Soit F la fonction définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Soit $x\in[a;b]$. On pose $h\in\mathbb{R}$ avec $h>0$ et $x+h \in [a;b]$.

1. Démontrer que : $F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$.

2. Démontrer que : $h\times f(x)\leqslant\int_x^{x+h} f(t)\,dt\leqslant h\times f(x+h)$.

3. En déduire que : $f(x)\leqslant\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x+h)$.

4. Justifier que : $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$.

5. On admet que le résultat de la question 3. est toujours vrai avec $h<0$.
Que peut-on en déduire sur F ?

ROC

PROPRIÉTÉ. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Démonstration : R.O.C. dans le cas d'un intervalle fermé borné $[a;b]$, en admettant que la fonction possède alors un minimum sur cet intervalle. Admis dans le cas général.

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$.
On admet que f admet un minimum m sur $[a;b]$.
On pose $g(x)=f(x)-m$.

1. Démontrer que g est continue et positive sur $[a;b]$.

2. On définit les fonctions G et F sur $[a;b]$ par $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$ et $F(x)=G(x)+mx$.

Démontrer que F est une primitive de f sur $[a;b]$.

Exemples :

- une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est …
- une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 4x^3$ est …
- une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n\neq -1$) est …

PROPRIÉTÉ.

Si F et G sont deux primitives de f, alors il existe un réel k tel que, pour tout x de I :

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+k\ .$$

Démonstration :

PROPRIÉTÉ. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

Si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$, alors : $\int_a^b f(x)\,dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

Notation : on note souvent $\int_a^b f(x)\,dx=[\mathrm{F}(x)]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

Démonstration :

Exemples :

- $\int_a^b (3+x)\,dx =$
- $\int_a^b (-2\,\mathrm{e}^x+4)\,dx =$

III. Intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
Cette fonction admet une primitive F. Notons G une autre primitive de f : $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+k$, où $k \in \mathbb{R}$.
Alors : $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)=(\mathrm{G}(b)-k)-(\mathrm{G}(a)-k)=\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a)$.
Autrement dit, la différence F(b) – F(a) ne dépend pas de la primitive choisie.

Et on a vu que si f est positive sur $[a;b]$, on a $\int_a^b f(t)dt=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$, d'où la définition suivante :

DÉFINITION. Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On note F une primitive de f sur I.
Pour tous nombres a et b de I, on définit ***l'intégrale de f sur*** $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ par :

$$\int_a^b f(t)dt=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

PROPRIÉTÉS. $\int_a^a f(t)dt=0$ et $\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$

Démonstrations : *faciles*

PROPRIÉTÉ. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\mathrm{F}'=f$.

Autrement dit, F *est une primitive de* f *sur* $[a;b]$ *: c'est la primitive qui s'annule en* a.

Démonstration :

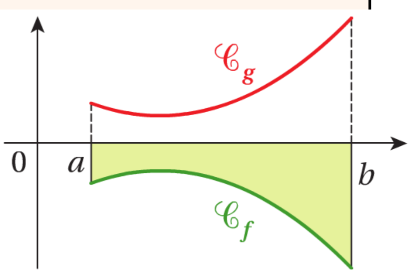
On a déjà démontré cette propriété dans le cas où f est positive sur $[a;b]$.
Soit $x \in \mathrm{I}$.

D'après la définition : $\mathrm{G}(x)-\mathrm{G}(a)=\int_a^x f(t)dt=\mathrm{F}(x)$, où G est une primitive de f.

Or, G est dérivable et $\mathrm{G}'=f$ donc F est dérivable et $f=\mathrm{F}'$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

PROPRIÉTÉ. Soit f une fonction continue et négative sur $[a;b]$, de courbe rep. C.
$\int_a^b f(t)dt$ est égal à l'opposé de l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan D délimitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Démonstration :

On pose $g=-f$. Alors g est continue est positive sur $[a;b]$.
On note F une primitive de f sur $[a;b]$.
Alors une primitive de g est $-\mathrm{F}$, notée G. On a donc $\mathrm{G}=-\mathrm{F}$.

$$\int_a^b f(t)dt=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)=-\mathrm{G}(b)+\mathrm{G}(a)=-(\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a))=-\int_a^b g(t)dt.$$

IV. Primitives usuelles

Fonction f : $f(x) = \dots$	Une primitive F. $\mathrm{F}(x) = \dots$	Intervalle
k (où $k \in \mathbb{R}$)	kx	$\mathbb{R}$
x^n (où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)		Si $n \geqslant 0$: $\mathbb{R}$ Si $n \leqslant -2$: $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		$]0;+\infty[$
e^x		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$		$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Une primitive F	Conditions
$\dfrac{u'}{u^2}$		u ne s'annule pas sur I
$u'u^n$ (où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)		Si $n < 0$: u ne s'annule pas sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$		u est strictement positive sur I
$u'\mathrm{e}^u$		
$\dfrac{u'}{u}$		u ne s'annule pas sur I

Exemples : • une primitive de $3(3x+2)^5$ est

• une primitive de $-2x\mathrm{e}^{x^2+4}$ est

• une primitive de $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ est

• une primitive de $\dfrac{3}{(3x+2)^2} - 2x\mathrm{e}^{x^2+3}$ est

Remarque : ***il existe des fonctions pour lesquelles on ne peut pas trouver une formule explicite*** (qui utilise les fonctions usuelles précédemment rencontrées et les règles opératoires classiques : addition, multiplication, composition, etc.) ***pour les primitives***. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, que l'on rencontre en Terminale S (probabilités et statistiques).

En mathématiques (mais pas souvent en Terminale S), ces cas sont fréquents : on peut alors seulement utiliser des intégrales pour dire que la fonction définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a. On fait alors seulement des calculs approchés d'intégrales, mais heureusement les moyens informatiques permettent maintenant des calculs rapides et une très bonne précision.

V. Propriétés des intégrales

V.1 Linéarité

PROPRIÉTÉ. Linéarité de l'intégrale

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I. Pour tous nombres réels a et b de I :

$$\int_a^b \lambda f(t)\,dt=\lambda\int_a^b f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^b (f(t)+g(t))\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt\,.$$

Démonstrations : utiliser la propriété $\int_a^b f(t)\,dt=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ …

V.2 Relation de Chasles

PROPRIÉTÉ. Relation de Chasles

Soit f une fonction continues sur un intervalle I.

Pour tous nombres réels a, b et c de I : $\int_a^c f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_b^c f(t)\,dt$.

Démonstration : utiliser la propriété $\int_a^b f(t)\,dt=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ …

V.3 Inégalités

PROPRIÉTÉS. Positivité et relation d'ordre

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $\mathrm{I}=[a;b]$.

- Si pour tout x de I, $f(x)\geqslant 0$, alors : $\int_a^b f(t)\,dt\geqslant 0$.
- Si pour tout x de I, $f(x)\leqslant g(x)$, alors : $\int_a^b f(t)\,dt\leqslant\int_a^b g(t)\,dt$.

Démonstrations :

- f est positive, donc $\int_a^b f(t)\,dt$ est une aire sous une courbe…
- On pose $h(x)=g(x)-f(x)$. On a donc $h(x)\geqslant 0$ et donc : $\int_a^b h(t)\,dt\geqslant 0$.

C'est-à-dire : $\int_a^b g(t)\,dt-\int_a^b f(t)\,dt\geqslant 0$ d'où : $\int_a^b f(t)\,dt\leqslant\int_a^b g(t)\,dt$.

V.4 Valeur moyenne

DÉFINITION.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

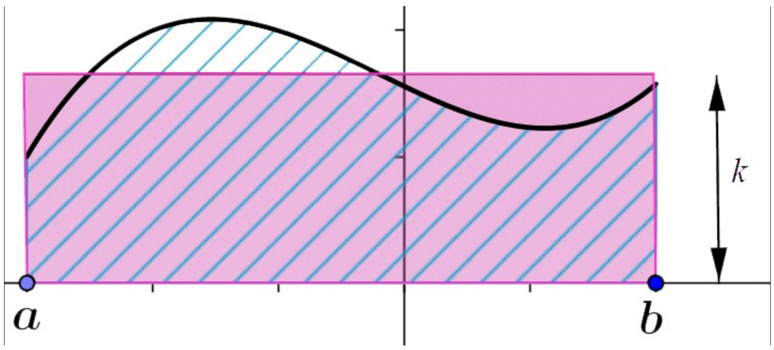
La ***valeur moyenne de la fonction f*** sur $[a;b]$ est le réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

PROPRIÉTÉ. Soit *f* une fonction continue et positive sur $[a;b]$, de courbe rep. *C*.

La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel k tel que le rectangle de dimensions $b-a$ et k soit de même aire que la partie du plan délimitée par *C*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Démonstration : *facile*

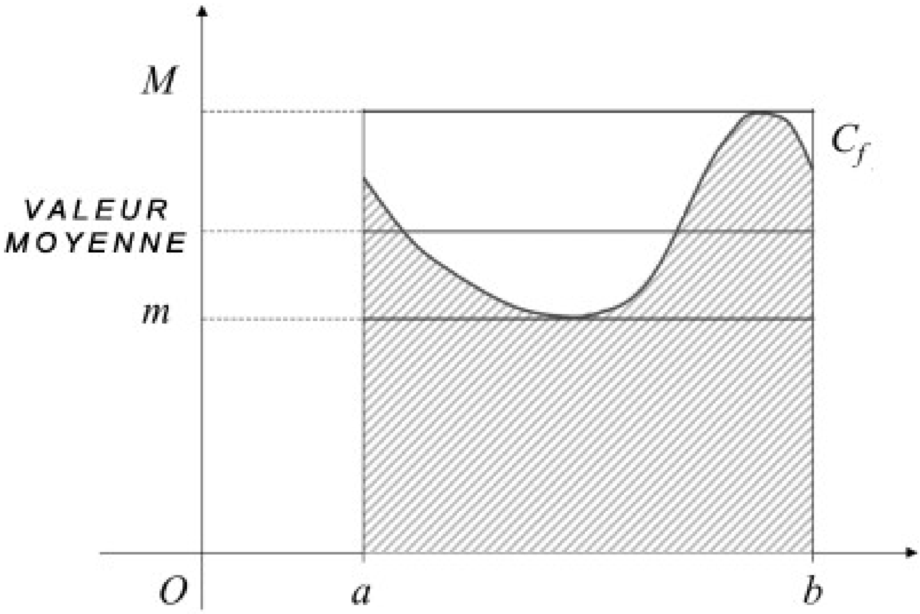


PROPRIÉTÉ. Soit *f* une fonction continue sur $[a;b]$.

Si pour tout x de $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$, alors :

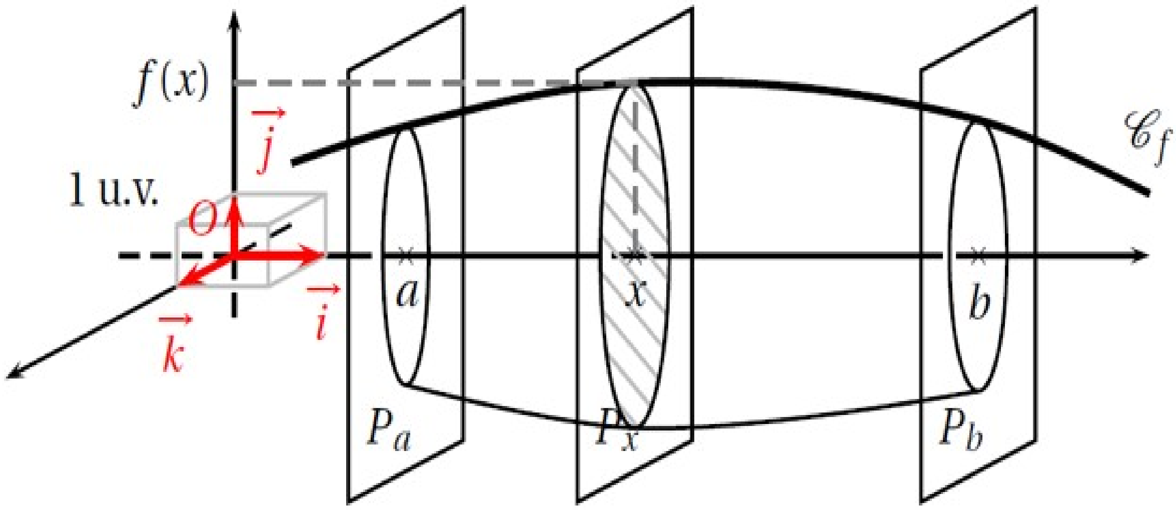
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \mathrm{M}(b-a) \quad \text{c'est-à-dire} \quad m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \mathrm{M}.$$

Démonstration : *facile. Utiliser la conservation de l'ordre...*



COMPLÉMENTS

Cas particulier des solides de révolution



Avec les notations de la figure, le volume du solide est donné par : $\displaystyle\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}\,x$.

Trois siècles vous contemplent


Jacques Bernoulli (1654–1705)

Leibniz, qui était philosophe, scientifique et juriste en plus d'être mathématicien, rêvait d'une langue formelle universelle, qu'il nommait « la caractéristique universelle », commune à tous les discours rationnels, et qu'il voyait comme première étape à la mécanisation des raisonnements logiques, *calculus ratiocinator*. Si cette langue est restée à l'état d'utopie, on doit néanmoins à Leibniz de nombreux néologismes dans le vocabulaire mathématique et de nombreuses notations nouvelles, en particulier en analyse, dans le domaine du calcul différentiel et intégral. On a d'ailleurs donné son nom à la notation $\mathrm{d}\,x$ ou Δx pour désigner une quantité infinitésimale de x.
C'est lui encore qui invente en 1692 le concept de *fonction* (au sens latin de *functio*, exécution) et surtout l'écriture $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, notée au départ $\mathrm{d}\,y:\mathrm{d}\,x$, comme pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction qui à x associe $y=f(x)$.


Jean Bernoulli (1667–1748)

Si le mot « intégrale » (du latin *integer*, entier, total) vient des frères Bernoulli (1690), Leibniz, lui, en reste au « calcul sommatoire », voyant l'intégrale en question comme somme d'un nombre infini de quantités infinitésimales, les $f(x_n)\mathrm{d}x_n$, avec $\mathrm{d}\,x_n=x_{n+1}-x_n$. Il la désigne donc dès 1675, après avoir utilisé l'abréviation *omn.* (pour *omnes lineas*), par la lettre S qu'on écrivait à l'époque en « s long » : *ſumma*. Le S étant la première lettre de *summa omnium* (« somme totale »). Jean Bernoulli aurait préféré que l'on utilise plutôt une lettre I (pour *integralis*) mais le $\int$ est resté.
Notre fameux $\int f(x)\mathrm{d}\,x$ est donc chargé de trois siècles d'histoire.
En France, les milieux scientifiques furent davantage marqués par Leibniz que par Newton. Il faut y voir l'influence des frères Bernoulli, inconditionnels du savant allemand et qui mobilisèrent tout leur génie pour mettre en valeur ses méthodes en résolvant divers problèmes.