DÉMONSTRATION

PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION

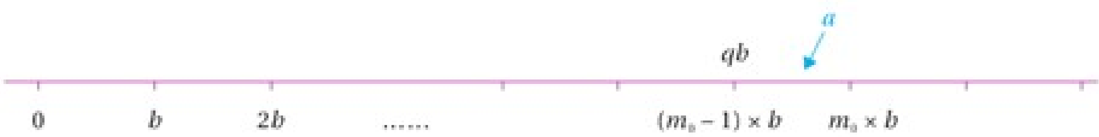
Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entiers $(q\,;\,r)$ tels que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
Cette écriture s'appelle la **division euclidienne de** a par b, q est le **quotient** et r le **reste** de cette division euclidienne.

DÉMONSTRATION

1. Existence

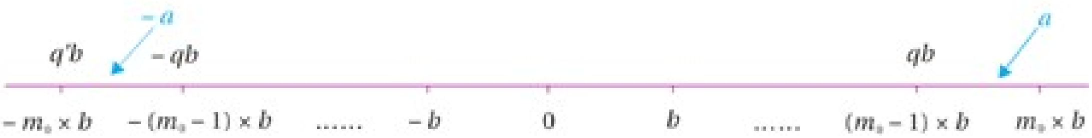
- **Cas où a est positif**

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des entiers naturels m tels que $mb > a$. Comme $b \geqslant 1$, $(a+1) \times b \geqslant a + 1 > a$ d'où $a + 1$ appartient à $\mathscr{E}$ qui est donc un ensemble non vide.
D'après l'axiome du plus petit élément, il existe un entier m_0, plus petit élément de $\mathscr{E}$, tel que $(m_0 - 1) \times b \leqslant a < m_0 \times b$.
En notant $q = (m_0 - 1)$ et $r = a - bq$, on a bien $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.
En effet, comme $(m_0 - 1) \times b \leqslant a < m_0 \times b$, on a alors $(m_0 - 1) \times b - bq \leqslant a - bq < m_0 \times b - bq$, ce qui, en simplifiant, équivaut à $0 \leqslant r < b$.



- **Cas où a est négatif**

On considère le nombre $-a$ qui est positif. Il existe donc deux entiers naturels q et r tels que $-a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$ d'après le cas étudié précédemment.
On en déduit que $a = b \times (-q) - r$.
Si $r = 0$, alors $a = b \times (-q)$, et $-q$ est le quotient.
Si $r > 0$, alors $a = b \times (-q) - r = b \times (-q - 1) + (b - r)$. Comme $0 < r < b$ alors, avec $0 < b - r < b$, et par extension $0 \leqslant b - r < b$.
En notant $q' = -q - 1$ et $r' = b - r$, on a bien $a = bq' + r'$ avec $0 \leqslant r' < b$.



2. Unicité

On suppose qu'il existe deux couples $(q\,;\,r)$ et $(q'\,;\,r')$ qui vérifient la propriété.
On a $a = bq + r = bq' + r'$, d'où $b \times (q - q') = r' - r$.
Comme $0 \leqslant r < b$, alors $-b < -r \leqslant 0$, et comme on sait que $0 \leqslant r' < b$, on obtient, par addition, l'encadrement $-b < r' - r < b$. Or $r' - r = b \times (q - q')$ est un multiple de b compris strictement entre $-b$ et b, il ne peut s'agir que de 0.
Par suite $r' - r = 0$ d'où $r = r'$. D'autre part, $b \times (q - q') = 0$, d'où $q = q'$.
En conclusion, le couple $(q\,;\,r)$ vérifiant la propriété est unique. ■

EXEMPLE

Dans la division euclidienne par 17, on a $328 = 17 \times 19 + 5$ et $-328 = 17 \times (-20) + 12$.