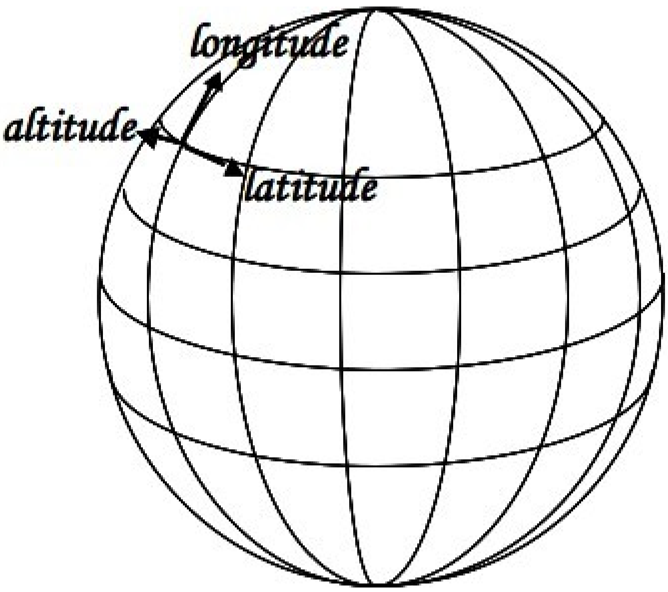
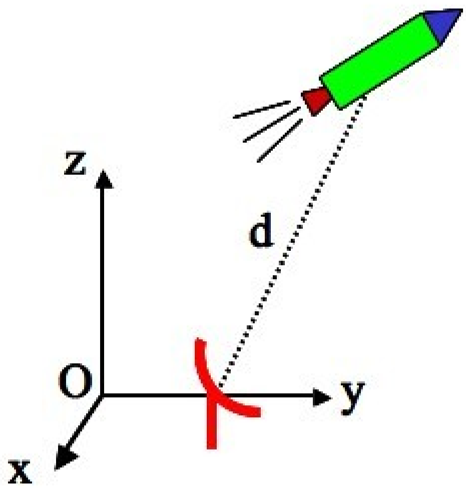
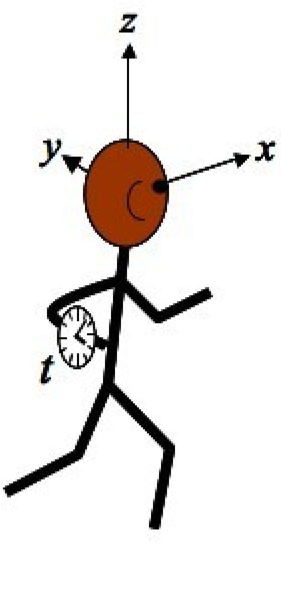
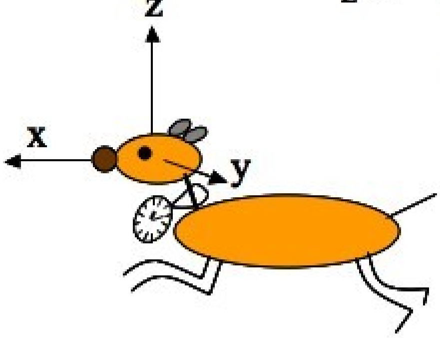
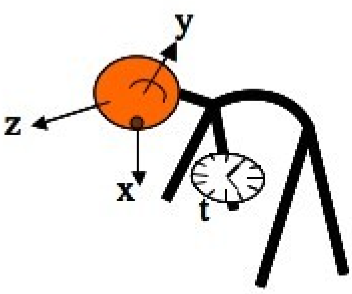
GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

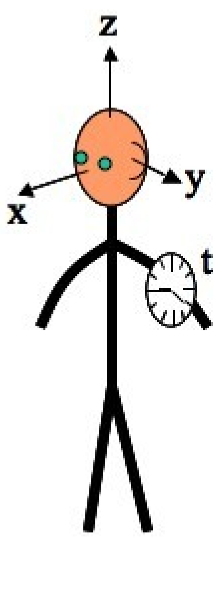












I. Vecteurs, droites et plans de l'espace

I.1 Vecteurs de l'espace

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.

Dans l'espace, comme dans le plan, étant donné quatre points A, B, C et D, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si la translation qui transforme A en B transforme C en D, ce qui revient à dire que ABDC est un parallélogramme ou encore que (si A ≠ B et C ≠ D) les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction : (AB) // (CD) ;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens ;
- $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même norme : AB = CD.

On a alors :

PROPRIÉTÉ.

Pour tout point A de l'espace et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{AM}=\vec{u} .$$

Admises

PROPRIÉTÉS ET DÉFINITIONS.

Les opérations sur les vecteurs de l'espace sont les mêmes que celles sur les vecteurs dans le plan.

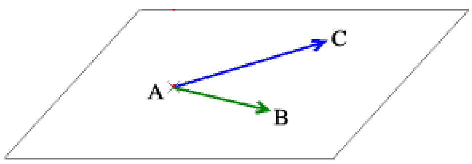
Addition, relation de Chasles, vecteur nul, multiplication d'un vecteur par un réel, colinéarité…

I.2 Droites de l'espace

DÉFINITION. Soient A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires,
c'est à dire l'ensemble des points M tels que :

I.3 Plans de l'espace

DÉFINITION. Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que :



PROPRIÉTÉ.

Deux plans dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Démonstration : *admise mais possible. Se ramener aux notions du chapitre « Droites et plans dans l'espace ».*

II. Coplanarité

DÉFINITION.
Trois vecteurs sont dits ***coplanaires*** s'ils possèdent un représentant dans un même plan.

PROPRIÉTÉ. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

Démonstration : évidente

Soit O un point, et les points A, B et C tels que : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc O, A et B ne sont pas alignés et forment un plan.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow$ O, A, B et C sont coplanaires
$\Leftrightarrow$ C $\in$ (OAB)
$\Leftrightarrow$ il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$
$\Leftrightarrow$ il existe des réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

III. Repères de l'espace

Admise

PROPRIÉTÉ. Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Soit O un point de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que :

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

Autrement dit, tout vecteur de l'espace peut se décomposer suivant trois vecteurs non coplanaires.

DÉFINITIONS.
$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est appelé un ***repère de l'espace***.
$(x;y;z)$ sont les ***coordonnées du vecteur*** $\vec{u}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Remarques :

- Lorsque trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, aucun de ces trois vecteurs n'est combinaison linéaire des deux autres (par exemple, il n'existe pas deux réels x et y tels que $\vec{k}=x\vec{i}+y\vec{v}$).
On dit alors que $\vec{i},\vec{j}$, et $\vec{k}$ forment une ***famille libre*** ou que les vecteurs sont ***linéairement indépendants***.

- Dans le cas où des vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, on dit qu'ils sont ***linéairement dépendants***, ou qu'ils forment une ***famille liée***.

- Ces notions abordées constituent les fondements de l'***algèbre linéaire***, très largement développés dans l'enseignement supérieur.

Tous les résultats de la géométrie plane concernant les coordonnées s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisième coordonnée :

PROPRIÉTÉS. Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère quelconque de l'espace.
• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ alors :

- pour tout réel λ, le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x;\lambda y;\lambda z)$
- le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y';z+z')$.

• Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A ; y_A ; z_A)$ et $(x_B ; y_B ; z_B)$ alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$.
- le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_B + x_A}{2} ; \frac{y_B + y_A}{2} ; \frac{z_B + z_A}{2}\right)$.

PROPRIÉTÉS. Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère **orthonormé** de l'espace.

• Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x ; y ; z)$ alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

• Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A ; y_A ; z_A)$ et $(x_B ; y_B ; z_B)$ alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Quelques démonstrations :

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}) - (x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}) = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$

d'où les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

• Pour tout point M de l'espace :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (facile à démontrer)

donc avec $M = O$: $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OI}$

donc $\frac{1}{2}(x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k} + x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}) = x_I \vec{i} + y_I \vec{j} + z_I \vec{k}$

donc $\frac{x_A + x_B}{2}\vec{i} + \frac{y_A + y_B}{2}\vec{j} + \frac{z_A + z_B}{2}\vec{k} = x_I \vec{i} + y_I \vec{j} + z_I \vec{k}$

d'où la propriété du milieu.

• Utiliser le théorème de Pythagore pour montrer que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

IV. Représentation paramétrique

IV.1 Représentation paramétrique d'une droite

THÉORÈME.

La droite D passant par le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + k a \\ y = y_A + k b \\ z = z_A + k c \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Le système ci-dessus est appelé ***une représentation paramétrique de la droite*** D et on dit que t est le paramètre.

Démonstration :

$\mathrm{M}(x\,;y\,;z) \in \mathrm{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=k\,\vec{u}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\begin{cases} x-x_{\mathrm{A}}=k\,a \\ y-y_{\mathrm{A}}=k\,b \\ z-z_{\mathrm{A}}=k\,c \end{cases}$

Remarque : une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

IV.2 Représentation paramétrique d'un plan

THÉORÈME.

Le plan P passant par le point $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}}\,;z_{\mathrm{A}})$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ et $\vec{v}(a'\,;b'\,;c')$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ tels que :

$$\begin{cases} x=x_{\mathrm{A}}+\lambda\,a+\mu\,a' \\ y=y_{\mathrm{A}}+\lambda\,b+\mu\,b' \\ z=z_{\mathrm{A}}+\lambda\,c+\mu\,c' \end{cases}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

Le système ci-dessus est appelé ***une représentation paramétrique du plan*** P.

Démonstration :

$\mathrm{M}(x\,;y\,;z) \in \mathrm{P} \Leftrightarrow$ il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$

$\Leftrightarrow$ il existe deux réels λ et μ tels que $\begin{cases} x-x_{\mathrm{A}}=\lambda\,a+\mu\,a' \\ y-y_{\mathrm{A}}=\lambda\,b+\mu\,b' \\ z-z_{\mathrm{A}}=\lambda\,c+\mu\,c' \end{cases}$

Remarque : un plan admet une infinité de représentations paramétriques.