ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES

Notions réinvesties : théorèmes de Bézout et de Gauss

Une équation diophantienne, en mathématiques, est une équation polynomiale à une ou plusieurs inconnues dont les solutions sont cherchées parmi les nombres entiers, éventuellement rationnels, les coefficients étant eux-mêmes également entiers.
Historiquement, elles sont apparues au IIIe siècle après Jésus-Christ, introduites par le mathématicien grec Diophante d'Alexandrie.
De nombreux problèmes ont depuis lors vu le jour et ont pour certains mis longtemps avant d'être élucidés, comme par exemple le dernier théorème de Fermat caractérisant l'existence de solutions à l'équation $x^n + y^n = z^n$ en fonction du nombre n, qui n'a été résolu qu'en 1994 par Andrew Wiles (et Richard Taylor).

A. Résolution générale

On souhaite résoudre l'équation (E) : $ax+by=c$ (a, b, c entiers relatifs avec a et b non tous deux nuls).

1. Démontrer que :
si l'équation (E) admet des solutions entières, alors c est un multiple de PGCD(a,b).

2. On supposera par la suite que c est un multiple de PGCD(a,b).

a) Démontrer qu'il suffit alors de savoir résoudre une équation du type $a'x+b'y=c'$ avec a' et b' premiers entre eux.

b) Justifier qu'il existe nécessairement une solution à l'équation $a'x+b'y=c'$, que l'on note $(x_0 ; y_0)$.

c) Démontrer que si l'équation $a'x+b'y=c'$ admet une solution $(x ; y)$, alors $a' \mid y_0-y$.
En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $x=x_0+b'k$ et $y=y_0-a'k$.

3. Conclure quant aux solutions (dans $\mathbb{Z}$) de l'équation (E).

B. Recherche d'une solution particulière : coefficients de Bézout

Dans la méthode décrite au A., nous avons utilisé l'existence de solutions particulières $(u ; v)$ à une équation du type $a'x+b'y=1$, avec a' et b' premiers entre eux.
Un tel couple est appelé ***coefficients de Bézout*** pour a' et b'.
En effet, le théorème de Bézout assure l'existence d'un tel couple, mais comment le trouver si une solution particulière n'est pas évidente…

1. a) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers u et v tels que $150u+31v=1$.

b) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers u et v tels que $255u+77v=1$.

2. Écrire un programme en Python qui détermine, à partir de l'algorithme d'Euclide, deux entiers u et v tels que $a'u+b'v=1$ lorsque a' et b' sont premiers entre eux.

C. Synthèse : méthode générale

1. Écrire une méthode générale pour résoudre les équations diophantiennes $ax+by=c$.

2. Écrire un programme en Python qui résout n'importe quelle équation diophantienne $ax+by=c$.