Hippolyte SYLVESTRE
2nd B

Eudoxie SYLVESTRE
TS

Devoir maison
Football : la science du penalty

a) L'étude porte sur 1417 pénalties, sur une période allant de septembre 1995 à juin 2000.

b) On lit dans le texte que ce pourcentage est de "7,5%".
En effet, d'après le tableau 1 (CL + CC + CR), on obtient :
$3,6 + 0,3 + 3,6 = 7,5$

c) Un droitier tire à sa gauche (RL + RC + RR) :
$20,8 + 0,6 + 32,1 = 53,5$ soit 53,5 %
Un droitier tire à sa droite (LL + LC + LR) :
$15,8 + 0,6 + 22,5 = 38,9$ soit 38,9 %
$53,5 > 38,9$.
Il tire donc plus souvent à sa gauche, son côté naturel.

d) D'après le tableau, les pénalties sont réussis dans 80,1 % des cas.

e) Le gardien va dans la bonne direction dans les cas LL ou CC ou RR.
$19,6 + 0,3 + 27,6 = 47,5$ soit 47,5 % des cas

f) Calculons le pourcentage de réussite du tireur dans ce cas : $0,196 \times 0,552 + 0,003 \times 0,5 + 0,276 \times 0,711$
$\approx 0,306$ soit 30,6 % de réussite

Donc $\frac{30,6}{47,5} \times 100 \simeq 64,4$

On trouve donc 64,4 % de réussite, ce que confirme le texte : " over 60% ".

g) Pour un gaucher :

- côté naturel : (LL / LC / LR) :

$0,293 \times 0,621 + 1 \times 0,014 + 0,204 \times 0,951 \simeq 0,39$

Donc 39 % de réussite

- côté non - naturel : (RL / RC / RR) :

$0,238 \times 0,938 + 0 \times 0 + 0,165 \times 0,612 \simeq 0,324$

Soit 32,4 % de réussite.

Pour un droitier :

- côté naturel : (RL / RC / RR) :

$0,976 \times 0,208 + 1 \times 0,006 + 0,732 \times 0,321 \simeq 0,444$

Soit 44,4 % de réussite

- côté non - naturel : (LL / LC / LR) :

$0,5 \times 0,158 + 1 \times 0,006 + 0,938 \times 0,225 \simeq 0,296$

Soit 29,6 %

Un joueur a donc plus de réussite en tirant un pénalty de son côté naturel.

Le Tir Prudent

1. Le gardien se renseigne sur le côté naturel du tireur et plonge systématiquement de ce côté.

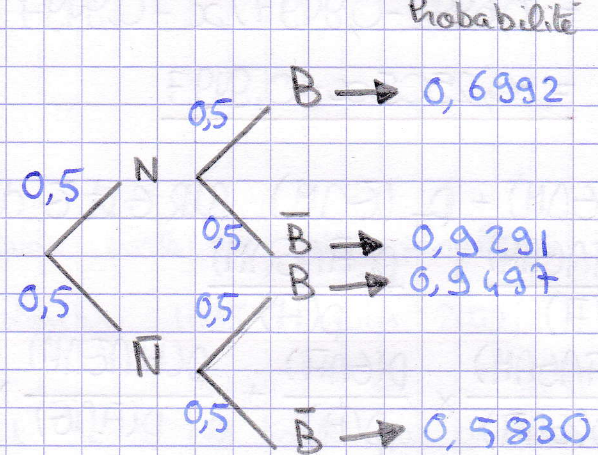
2. Le tireur a 69,92 % de chance de réussir son pénalty d'après les données.

le Tir Aléatoire

1. Il choisit un côté de manière aléatoire

2. Soit N l'évènement : "le joueur tire de son côté naturel"

Soit B l'évènement : "le gardien plonge du côté naturel du tireur"



Peut-être rajouter une troisième partie à l'arbre : $<^{M}_{\bar{M}}$ où M : "le tireur marque le penalty" pour justifier le calcul ci-dessous.

$0{,}5\times0{,}5\times0{,}6992 + 0{,}5\times0{,}5\times0{,}9291 + 0{,}5\times0{,}5\times0{,}9497 + 0{,}5\times0{,}5\times0{,}5830$

$\simeq 0{,}7903$

Soit 79,03 % de chance de marquer son penalty

L'équilibre de Nash

① D'après les données, la probabilité de marquer lorsque le joueur tire de son côté naturel et que le gardien plonge de ce même côté est de 69,92 %, donc $P_{G\cap H}(M)=0{,}6992$

De même :

$P_{\bar{G}\cap H}(M)=0{,}9797$

$P_{G\cap \bar{H}}(M)=0{,}9291$

$P_{\bar{G}\cap \bar{H}}(M)=0{,}583$

② a) $P_{G\cap H}(M)\times p_H(G)+P_{\bar{G}\cap H}(M)\times p_H(\bar{G})$

$=\frac{p(G\cap H\cap M)}{\cancel{p(G\cap H)}}\times\frac{\cancel{p(H\cap G)}}{p(H)}+\frac{p(\bar{G}\cap H\cap M)}{\cancel{p(\bar{G}\cap H)}}\times\frac{\cancel{p(H\cap \bar{G})}}{p(H)}$

$=\frac{p(G\cap H\cap M)}{p(H)}+\frac{p(\bar{G}\cap H\cap M)}{p(H)}$

$=P_H(G\cap M)+P_H(\bar{G}\cap M)$

$=P_H(M)$ car G et $\bar{G}$ sont disjoints

b) Ainsi, $P_H(M) = P_{G\cap H}(M) \times P_H(G) + P_{\overline{G}\cap H}(M) \times P_H(\overline{G})$

$= 0,6992 \times p(G) + 0,9497 \times p(\overline{G})$ car H et G indépendants et H, $\overline{G}$ également

$= 0,6992x + 0,9497 \times (1 - p(G))$

$= 0,6992x + 0,9497 \times (1-x)$

$= (0,6992 - 0,9497)x + 0,9497$

$= -0,2505x + 0,9497$

③ $P_{\overline{H}}(M) = P_{\overline{H}}(G\cap M) + P_{\overline{H}}(\overline{G}\cap M)$ car G et $\overline{G}$ disjoints

$$= \frac{p(\overline{H}\cap G\cap M)}{p(\overline{H})} + \frac{p(\overline{H}\cap\overline{G}\cap M)}{p(\overline{H})}$$

$$= \frac{p(\overline{H}\cap G\cap M)}{p(G\cap\overline{H})} \times \frac{p(G\cap\overline{H})}{p(\overline{H})} + \frac{p(\overline{H}\cap\overline{G}\cap M)}{p(\overline{H}\cap\overline{G})} \times \frac{p(\overline{H}\cap\overline{G})}{p(\overline{H})}$$

$= P_{G\cap\overline{H}}(M) \times P_{\overline{H}}(G) + P_{\overline{H}\cap\overline{G}}(M) \times P_{\overline{H}}(\overline{G})$

$= 0,9291 \times p(G) + 0,583 \times p(\overline{G})$ car G, H indépendants donc $\overline{H}$ et G, $\overline{H}$ et $\overline{G}$ le sont aussi

$= 0,9291x + 0,583 \times (1 - p(G))$

$= 0,9291x + 0,583(1-x)$

$= (0,9291 - 0,583)x + 0,583$

$= 0,3461x + 0,583$

④ On applique l'équilibre de Nash, soit :

$P_H(M) = P_{\overline{H}}(M)$

$\Leftrightarrow -0,2505x + 0,9497 = 0,3461x + 0,583$

$\Leftrightarrow 0,5966x = 0,3667$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{0,3667}{0,5966}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{193}{314}$ On a donc $x \approx 0,6146$

Ainsi, on trouve $x \approx 61,46\%$, ce qui correspond au tableau $(1-u_L)$.

$\dfrac{|61,46 - 60,02|}{61,46} \times 100 \approx 2,3$ Il y a seulement 2,3% de différence relative entre les valeurs théoriques et réelles.

SYLVESTRE (2)

⑤ On pose $y = p(H)$.

Calculons $p_G(\overline{M})$ et $p_{\overline{G}}(M)$.

$$\underline{p_G(\overline{M})} = p_G(H \cap \overline{M}) + p_G(\overline{H} \cap \overline{M}) \quad \text{car } H \text{ et } \overline{H} \text{ disjoints}$$

$$= \frac{p(G \cap H \cap \overline{M})}{p(G)} + \frac{p(G \cap \overline{H} \cap \overline{M})}{p(G)}$$

$$= \frac{p(G \cap H \cap \overline{M})}{p(G \cap H)} \times \frac{p(G \cap H)}{p(G)} + \frac{p(G \cap \overline{H} \cap \overline{M})}{p(G \cap \overline{H})} \times \frac{p(G \cap \overline{H})}{p(G)}$$

$$= p_{G \cap H}(\overline{M}) \times p_G(H) + p_{G \cap \overline{H}}(\overline{M}) \times p_G(\overline{H})$$

$$= [1 - p_{G \cap H}(M)] \times p(H) + [1 - p_{G \cap \overline{H}}(M)] \times p(\overline{H}) \quad \text{car } G \text{ et } H \text{ indépendants donc } G \text{ et } \overline{H} \text{ aussi}$$

$$= (1 - 0{,}6992) \times y + (1 - 0{,}9291) \times (1 - y)$$

$$= 0{,}3008\,y + (1 - y) \times 0{,}0709$$

$$= (0{,}3008 - 0{,}0709)\,y + 0{,}0709$$

$$= \underline{0{,}2299\,y + 0{,}0709}$$

$$\underline{p_{\overline{G}}(\overline{M})} = p_{\overline{G}}(H \cap \overline{M}) + p_{\overline{G}}(\overline{H} \cap \overline{M}) \quad \text{car } H \text{ et } \overline{H} \text{ disjoints}$$

$$= \frac{p(\overline{G} \cap H \cap \overline{M})}{p(\overline{G})} + \frac{p(\overline{G} \cap \overline{H} \cap \overline{M})}{p(\overline{G})}$$

$$= \frac{p(\overline{G} \cap H \cap \overline{M})}{p(\overline{G} \cap H)} \times \frac{p(\overline{G} \cap H)}{p(\overline{G})} + \frac{p(\overline{G} \cap \overline{H} \cap \overline{M})}{p(\overline{G} \cap \overline{H})} \times \frac{p(\overline{G} \cap \overline{H})}{p(\overline{G})}$$

$$= p_{\overline{G} \cap H}(\overline{M}) \times p_{\overline{G}}(H) + p_{\overline{G} \cap \overline{H}}(\overline{M}) \times p_{\overline{G}}(\overline{H}) \quad \text{car } G \text{ et } H \text{ indépendants donc } \overline{G} \text{ et } H,\ \overline{G} \text{ et } \overline{H} \text{ aussi}$$

$$= [1 - p_{\overline{G} \cap H}(M)] \times p(H) + [1 - p_{\overline{G} \cap \overline{H}}(M)] \times p(\overline{H})$$

$$= (1 - 0{,}9497)\,y + (1 - 0{,}583)(1 - y)$$

$$= 0{,}0503\,y + (1 - y) \times 0{,}417$$

$$= \underline{-0{,}3667\,y + 0{,}417}$$

On applique l'équilibre de Nash :

$$P_{G}(M) = P_{\bar{G}}(M)$$

$\Leftrightarrow 0,2299\,y + 0,0709 = -0,3607\,y + 0,417$

$\Leftrightarrow 0,5966\,y = 0,3461$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{0,3461}{0,5966}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{3461}{5966}$ On a $y \simeq 0,5801$

Ainsi, on trouve $y \simeq 58,01\,\%$, tout comme le tableau l'indique (1-g.).

$$\frac{|58,01 - 57,69|}{58,01} \times 100 \simeq 0,55$$

Il y a seulement 0,55 % de différence relative entre les valeurs théoriques et réelles.