FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

I. Définition

Les fonctions exp et ln sont dites réciproques l'une de l'autre.

DÉFINITION.

Soit $a > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$e^b = a \quad \text{et } b \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \quad b = \ln(a) \text{ et } a \in]0;+\infty[.$$

On note donc $\ln$ la fonction qui, à tout réel $x > 0$, associe le réel $\ln(x)$.

On note alors $\ln(x)$ ou $\ln x$.

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES.

- $\ln 1 =$
- $\ln e =$
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(e^{-1}\right) =$
- $\forall\ x \in \mathbb{R}\ :\ \ln e^x =$
- $\forall\ x \in\ ]0;+\infty[\ :\ e^{\ln(x)} =$

II. Propriétés algébriques

THÉORÈME. **Relation fonctionnelle**

Pour tous réels a et b tels que $a > 0$ et $b > 0$:

Démonstration :

PROPRIÉTÉS.

Pour tous réels a et b tels que $a>0$ et $b>0$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=$
- $\ln\sqrt{a}=$
- $\ln\left(a^m\right)=$

Démonstrations *(grandes étapes)* :

III. Etude de la fonction ln

III.1 Variations

PROPRIÉTÉ.

$\ln$ est dérivable sur son ensemble de définition et $\ln'(x)=$

Démonstration :

On admet[1] que la fonction $\ln$ est dérivable.

On pose $f(x)=\mathrm{e}^{\ln(x)}$ pour tout $x>0$.

Remarque : $\ln$ est donc également continue sur son ensemble de définition.

1 Mais, comme nous le verrons au III.3, la courbe $C_{\ln}$ est la symétrique de la courbe $C_{\exp}$ par rapport à une droite. La fonction exponentielle étant dérivable, sa symétrique l'est aussi intuitivement (coeff. directeur de la tangente…).

COROLLAIRE.

$\ln$ est strictement croissante sur son ensemble de définition

Démonstration : évidente

COROLLAIRES IMMÉDIATS.

- $\ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$
- $\ln x>0 \Leftrightarrow x>1$
- $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$
- $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$

D'où le tableau de variations de $\ln$:

III.2 Limites aux bornes

PROPRIÉTÉS.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)=$

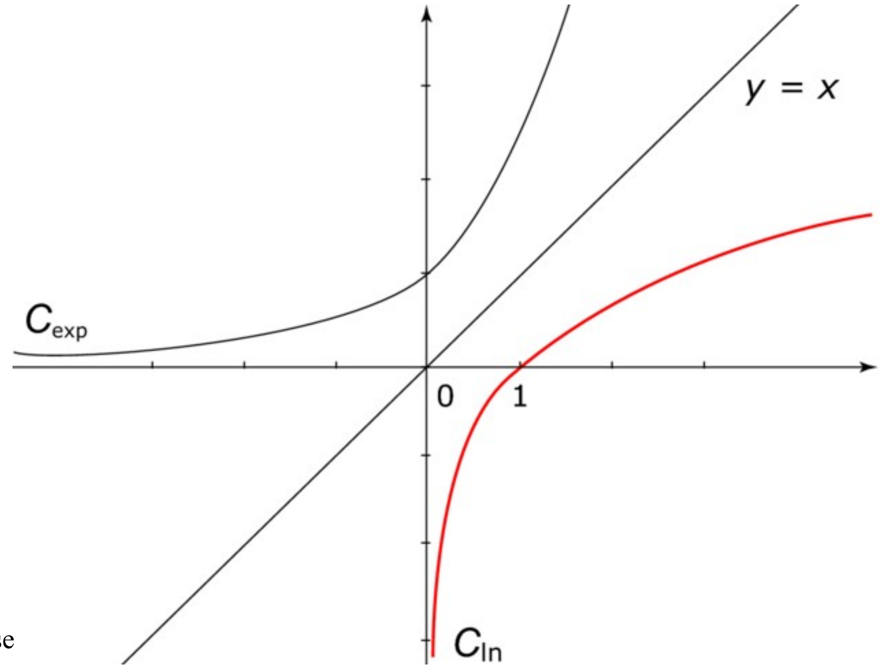
Démonstrations :

III.3 Courbe représentative

PROPRIÉTÉ.

On note $C_{\ln}$ la courbe représentative de la fonction $\ln$, et $C_{\exp}$ celle de la fonction $\exp$.

$C_{\ln}$ est la symétrique de $C_{\exp}$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Démonstration : en classe

Remarque : quelle est l'équation de la tangente à $C_{\ln}$ au point d'abscisse 1 ?

IV. Limites usuelles

PROPRIÉTÉS. Soit n un entier naturel non nul.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) =$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) =$

Démonstrations :

Voir exercices 95 et 96 page 222.

a) L'idée est de montrer que $0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et d'utiliser le théorème des gendarmes.

Pour la puissance n-ième, se ramener à un produit de limites.

b) Poser $X = \dfrac{1}{x}$, en écrivant alors $x \ln(x) = \dfrac{1}{X} \ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\dfrac{\ln(X)}{X}$.

Pour la puissance n-ième, se ramener à un produit de limites.

PROPRIÉTÉ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=$$

Démonstration :

$\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$ d'où $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}=1$

V. Dérivée d'une composée ln(u)

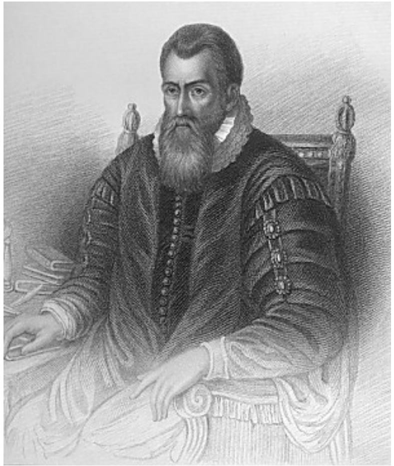
PROPRIÉTÉ.

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Alors la fonction composée $\ln u$ est dérivable et sa dérivée est :

$$(\ln u)'=$$

Démonstration :

C'est la dérivée d'une fonction composée.
Voir chapitre « Calculs de dérivées (partie 2) ».

John Napier (1550, Edimbourgh - 4 avril 1617, Edimbourgh)

John Napier, peut-être plus connu en France sous le nom de Neper, a laissé son nom dans la postérité mathématique pour son invention des logarithmes.
Né en 1550, il est issu d'une riche famille écossaise, et deviendra lui-même baron de Merchiston.
A 13 ans, il est envoyé à l'Université de Saint-Andrews, dont les archives révèlent qu'il n'y a obtenu aucun diplôme. On pense qu'il a poursuivi ses études quelque part sur le continent, peut-être à Paris ou en Italie.

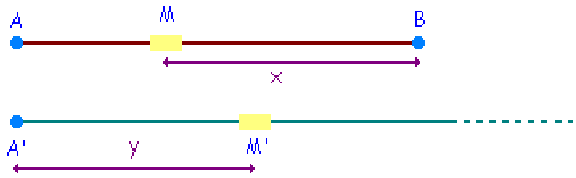
En 1571, il est de retour en Ecosse pour le mariage de son père, et lui-même se marie en 1572.
Deux ans plus tard, il s'établit dans un château nouvellement bâti sur les terres familiales. Il gère activement sa propriété, commerce beaucoup, et développe une approche scientifique de l'agriculture.

Par ses contemporains, John Napier est surtout connu comme théologien. Il est un fervent protestant, et cette religion lui paraît menacée en Ecosse par les agissements du catholique roi Philippe d'Espagne. Ce dernier semble conspirer avec le pape afin d'envahir l'Ecosse dans le but de conquérir la Grande-Bretagne toute entière. Napier met en garde le roi Jacques VI d'Ecosse contre toute collusion avec l'ennemi.
Il écrit aussi en 1593 son ouvrage le plus célèbre, *a Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*. Il y fait une lecture du livre des Révélations en condamnant vivement l'Eglise de Rome et faisant même du pape l'antéchrist de l'Apocalypse.
Cet ouvrage lui vaudra une certaine réputation jusque sur le continent.

Les activités mathématiques ne constituaient donc qu'un passe-temps pour Neper.
On le connaît pour avoir donné quelques formules en trigonométrie sphérique, et pour avoir popularisé la notation du point pour séparer la partie entière et la partie fractionnaire d'un nombre en écriture décimale.
Surtout, il est passionné par le fait de rendre le plus simple et le plus rapide possible les calculs portant sur les multiplications, les divisions et les extractions de racine carrée de grands nombres. Cela le conduit d'une part à l'invention des *os de Neper*, des petits bâtons de bois sur lesquels sont inscrits les tables de multiplication, et qui permettent de simplifier ces opérations.
Surtout, cela le conduit à l'invention des logarithmes.

L'approche des logarithmes de Napier est cinématique. Il considère un mobile M qui parcourt un segment [AB] de longueur 10^7. Il démarre du point A à la vitesse 10^7, et va à une vitesse égale à la distance MB.
Au même moment, un mobile M' part d'un autre point A', et avance à une vitesse uniforme égale à 10^7.
On note x la longueur BM, y la longueur A'M'.
Napier constate que, si on prend des intervalles de temps régulièrement répétés, x croît en progression géométrique, et y croît en progression arithmétique : il dit que y est le logarithme de x.
Avec des notations modernes, on a en effet :

$$y = -10^7 \ln\left(\frac{x}{10^7}\right)$$



$$\begin{cases} y(t) = 10^7 t \\ x'(t) = -x(t) \end{cases}$$

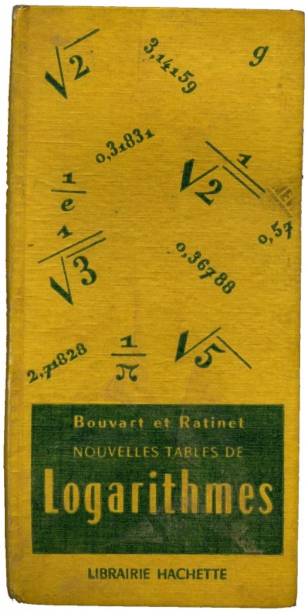
Le logarithme transforme donc multiplications en additions, racines carrées en division par 2, etc.

Napier publie son invention dans *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (description de la règle magnifique des logarithmes). Ce livre est lu par Briggs, un mathématicien anglais, qui entreprend à l'été 1615 le voyage à Edimbourgh, et persuade Napier d'utiliser des logarithmes en base 10, vérifiant log(1)=0.
C'est Briggs qui publia des tables très complètes de ces logarithmes, car Napier s'éteint le 4 avril 1617, apparemment des suites d'une crise de goutte.
Les logarithmes se propageront très rapidement, sous l'impulsion des astronomes comme des commerçants. Deux cents ans après leur invention, Laplace dira que les logarithmes, en abrégeant leurs labeurs, "doublait la vie des astronomes".

Terminons cette biographie par une petite anecdote.
Dans ces temps un peu irrationnels, les esprits brillants comme Napier étaient souvent vus comme des magiciens. La légende rapporte que, confronté à des problèmes de vols, Napier aurait annoncé pouvoir reconnaître le voleur parmi ses serviteurs grâce à son coq magique. Chaque serviteur est envoyé dans une pièce obscure caresser l'animal. Napier l'a malicieusement enduit de suie noire et le voleur, qui n'ose caresser le coq de peur d'être démasqué, est le seul à revenir la main propre !

Source : www.bibmath.net

Les tables de logarithmes sont devenues populaires très tôt parmi les calculateurs. Elles sont oubliées de nos jours, mais elles ont simplifié de travail de générations d'ingénieurs.
Chaque nombre a un logarithme qu'on trouve dans une table de logarithmes : par exemple, le logarithme de 17 vaut 1,2304489 et celui de 21 vaut 1,3222192.
La propriété fondamentale est que *le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes*.
Si on veut calculer le produit de 17 et de 21, on fait la somme de 1,2304489 et 1,3222192, on trouve 2,5526681, et on cherche dans sa table quel est le nombre dont le logarithme a cette valeur. On trouve 357, c'est le résultat de la multiplication. On a ainsi remplacé une multiplication par une addition (bien plus facile) et trois consultations de la table.



Dérivé de ce principe des logarithmes, la règle à calcul, maniée par les scientifiques et les ingénieurs jusqu'aux années 70 a été très populaire.